FYSISCH LABORATORIUM
RIJKSUNIVERSITEIT UTRECHT

KLASSIEKE MECHANIKA

Wetten van Newton en Coulomb

Dr. H. Nauta

september 1972

KLASSIEKE MECHANIKA

Wetten van Newton en Coulomb

K L A S S I E K E   M E C H A N I C A

DE WETTEN VAN NEWTON EN COULOMB

VOORWOORD

Dit dictaat bevat de leerstof van het college Mechanica dat wordt gegeven aan studenten in de Wiskunde, Natuurkunde en Sterrenkunde in de zogenaamde hoofdstroom van het eerste studiejaar in het kader van de basisopleiding nieuwe stijl, voor het eerst in de cursus 1970/71. De essentiële onderdelen van deze stof zijn beknopt uitgewerkt waarbij veelvuldig naar de literatuur wordt verwezen. Slechts in enkele gevallen zijn toepassingen behandeld.

De inhoud van het dictaat is zodanig dat tijdens het college slechts zo nu en dan een aantekening hoeft te worden gemaakt.

De leerboeken die bij dit dictaat worden aanbevolen, zijn:

1. Alonso & Finn, Fundamentele Natuurkunde. 1. Mechanica (Agon Elsevier, Amsterdam 1971).
2. Stephenson, Mechanics and Properties of Matter, 3rd ed. (J. Wiley & Sons, New York 1969).
3. Kittel, Knight and Rudermann, Mechanics, Berkeley Physics Course I (MacGraw-Hill, New York 1969). Meestal aangeduid als Berkeley I.
4. Feynman, Leighton and Sands, The Feynman Lectures on Physics I (Addison-Wesley, Reading, Mass. 1963).
5. Borghouts, Inleiding in de Mechanica, 2e uitg. (Delftsche Uitg. Mij., Delft 1966).
6. Sears, Mechanics, Wave Motion and Heat (Addison-Wesley, World Student Series Edition, Reading, Mass. 1965).

In dit dictaat wordt veelvuldig verwezen naar de eerste vier boeken en wel respectievelijk met de letters: AF, S, B, F, gevolgd door nummers van hoofdstukken en eventueel paragrafen en bladzijden.

Het college wordt ondersteund door een werkcollege. Hoewel op dit werkcollege geen principieel nieuwe onderwerpen aan de orde worden gesteld, wordt actieve deelname sterk aangeraden. Pas door het zelfstandig oplossen van vraagstukken en concrete fysische problemen leert men de theorie werkelijk begrijpen en de stof beheersen.

Utrecht, september 1972

Dr. H. Nauta.

I. INLEIDING

I.A. Doel, Aard en Plaats van de Mechanica in de Natuurbeschrijving

Het doel van de mechanica is het geven van een beschrijving c.q. verklaring van de beweging van objecten onder invloed van krachten. Hierbij is de herkomst der krachten (zoals bijv. gravitatie-, Coulomb-, Lorentz-, kernkracht) niet terzake maar er wordt alleen gelet op het verband tussen krachten, plaats, tijd, snelheid, enz. De mechanica is zodoende een basisvak waarop in andere gebieden van de fysica wordt voortgebouwd. Als voorbeeld kan men denken aan de beweging van geladen deeltjes onder invloed van krachten die ze ondervinden in elektrische of magnetische velden. De mechanica wordt meer dan enig ander gebied der fysica gekenmerkt door een grote mate van aanschouwelijkheid en doorzichtigheid van begrippen en appelleert sterk aan onze ervaringen in het dagelijks leven. Het is hierdoor begrijpelijk dat juist deze tak van de fysica historisch gezien het eerst tot ontwikkeling kwam.
Een ander kenmerk van de mechanica is de sterk axiomatische opbouw. Uitgaande van een klein aantal stellingen, namelijk de wetten van Newton, worden langs deductieve weg verscheidene andere stellingen afgeleid. Daardoor staat de mechanica qua opbouw dicht bij de wiskunde waarop de mechanica in het verleden een stimulerende invloed heeft gehad, bijvoorbeeld bij de ontwikkeling van de infinitesimaalrekening.

Klassieke mechanica heeft in het verleden door de grote successen o.a. bij de beschrijving van de beweging der hemellichamen de illusie gewekt een universele wetenschap te zijn. Zo heeft bijvoorbeeld Maxwell, de grondlegger van de leer van het elektromagnetisme, nog getracht de elektromagnetische verschijnselen en daarmee dus ook de optica af te leiden uit mechanische eigenschappen van de "ether". Daarbij baseerde hij zich op het oude ideaal van de Griekse wijsgeer Demokritos om alle verschijnselen in de natuur langs mechanische weg te verklaren, in het bijzonder door de vorm en beweging van kleine, ondeelbare deeltjes (atomos). Deze illusie leidde zelfs tot het zogenaamde "Mechanicisme", dat ook de verschijnselen van leven en geest geheel tot mechanische, dus gedetermineerde processen trachtte te herleiden.

In de twintigste eeuw is de beperkte geldigheid van de klassieke mechanica aan het licht gekomen. In de relativiteitstheorie is de

voorstelling van absolute ruimte en absolute tijd verloren gegaan en bleek de klassieke mechanica slechts een benadering te zijn voor het geval dat de snelheid klein is ten opzichte van de lichtsnelheid. Voorts bleek dat massa in energie kan worden omgezet en omgekeerd. In de quantummechanica (golfmechanica) komt de "causaliteit", althans de strikte voorspelbaarheid der verschijnselen, in het geding. Omtrent de strikt gedetermineerde grootheden van de klassieke mechanica zoals plaats, impuls, energie, worden in de quantummechanica waarschijnlijkheidsuitspraken gedaan. Aan deeltjes die in de klassieke mechanica als puntmassa kunnen worden beschouwd, wordt in de quantummechanica golfkarakter en daarmee uitgebreidheid toegekend. De quantummechanica heeft grote successen geboekt in de molecuul-, de atoom- en de kernfysica en is van essentiële waarde gebleken in de beschrijving van verschillende soorten chemische binding.

Als de relativistische- en quantum-mechanica samen allesomvattend zijn, rijst de vraag welk nut de bestudering van de klassieke mechanica voor ons dan nog heeft. Hier kan worden opgemerkt dat de klassieke mechanica een zeer goede beschrijving van de werkelijkheid geeft als de snelheid der deeltjes gering is ten opzichte van de lichtsnelheid en de grootte der deeltjes van macroscopische orde. Door de beperking in de precisie van meetinstrumenten heeft het toch geen zin de theoretische berekeningen tot de uiterste nauwkeurigheid uit te voeren.

De klassieke mechanica is voorts een goede inleiding tot de relativiteitstheorie en de quantummechanica, waarbij de sterke analogieën tussen de gebieden een belangrijk hulpmiddel vormen om de quantummechanica en de relativiteitstheorie beter te doorgronden.

I.B. Indeling van de Mechanica

De behandeling van de mechanica begint met de bestudering van mechanische gedragingen van het puntvormige lichaam of deeltje, ook wel aangeduid als puntmassa. Dit is een lichaam waarvan de afmetingen nul gesteld worden. In Hoofdstuk II wordt de mechanica van puntmassa's behandeld: eerst het onderdeel kinematica dat de leer van de bewegingen omvat zonder de oorzaken van die bewegingen erbij te betrekken, dan de dynamica waar de bewegingen bestudeerd worden in verband met de oorzaken ervan. De statica wordt als bijzonder geval van de dynamica beschouwd.

Mechanica is echter, als onderdeel van de fysica, een wetenschap van werkelijk bestaande materie en één van de kenmerken van materie is juist de uitgebreidheid, het bezitten van afmetingen. Toch kan de beweging van een uitgebreid lichaam vaak beschreven worden door slechts de beweging van één punt ervan te beschrijven. Als men wil uitrekenen hoeveel tijd een auto, die met een constante snelheid van 70 km per uur rijdt, nodig heeft om een afstand van 100 km af te leggen, kan de auto zonder bezwaar als puntvormig lichaam worden opgevat. Trouwens in de dynamica blijkt dat bij de beweging van werkelijke lichamen een bepaald punt, het zogenaamde zwaartepunt, een bijzondere rol speelt. Dit punt blijkt zich inderdaad te gedragen als een lichaam zonder afmetingen, echter wel met de overige kenmerken van de materie, zoals het bezitten van massa.

De mechanische gedragingen van lichamen, waarvan de afmetingen een rol spelen, kunnen worden achterhaald door het lichaam in een zeer groot aantal kleine delen, elk van verwaarloosbare afmetingen, verdeeld te denken. In Hoofdstuk III wordt de overgang van één puntmassa naar een systeem van puntmassa's gemaakt terwijl in Hoofdstuk IV een deel van de mechanica van zogenaamde continue media wordt behandeld.

In de puntmechanica worden de bewegingen der afzonderlijke puntmassa's beschreven door uit te gaan van de krachten en de beginvoorwaarden. Voor twee puntmassa's in onderlinge wisselwerking is het zonder meer mogelijke de bewegingen volledig te beschrijven: de Keplerbeweging. Voor drie puntmassa's is de afleiding der bewegingen mathematisch veel ingewikkelder. Voor continue lichamen die bestaan uit zeer grote aantallen moleculen en atomen (bijv. een stuk metaal of een volume

vloeistof) is deze methode onuitvoerbaar.

In de continuummechanica wordt deze moeilijkheid ondervangen door het continue lichaam niet te beschouwen als een systeem afzonderlijke massapunten met (onbekende) wisselwerkingskrachten, maar als een continu samenhangend geheel van volume-elementjes ΔV waarover een massa $\Delta m = \rho(x,y,z)\Delta V$ is uitgesmeerd. De functie $\rho(x,y,z)$ is de plaatsafhankelijke dichtheid die de continu gedachte massaverdeling van het lichaam beschrijft. De informatie die verloren is gegaan doordat nu de wisselwerkingskrachten buiten beschouwing gelaten worden, wordt gecompenseerd doordat gebruik gemaakt wordt van empirische wetten, die het macroscopisch gedrag van het continue lichaam beschrijven (bijv. de wet van Hooke bij elastische deformatie, de wet van Poiseuille bij visceuze vloeistofstroming, de gaswet van Boyle).

Ditzelfde probleem wordt op andere wijze benaderd in de statistische mechanica waar geen gebruik gemaakt wordt van macroscopische, empirisch gevonden wetten, maar waar juist door een microscopische beschouwing (uitgaande van puntmassa's) getracht wordt deze wetten te verklaren. Hierbij worden statistische methodes gebruikt om gemiddelde waarden van de dynamische grootheden te berekenen zonder dat men geïnteresseerd is in het gedrag van de puntmassa's afzonderlijk. Deze methode wordt bijvoorbeeld gebruikt om de wetten der warmteleer te verklaren. Bij de behandeling van de continuummechanica wordt nu de volgende indeling gemaakt:

1. Mechanica van starre continua, dat zijn lichamen die onder invloed van krachten verwaarloosbaar kleine vormveranderingen ondergaan.
2. Mechanica van elastische continua (elasticiteitsleer) die van vorm veranderen als er een kracht op werkt, de nieuwe vorm slechts behouden zolang die kracht werkt, en bij wegvallen van de kracht hun oorspronkelijke vorm weer aannemen.
3. Mechanica van fluïde continua (dat zijn stromende media zoals gassen en vloeistoffen: aerodynamica, hydrodynamica) die van vorm veranderen zolang er een kracht op werkt en bij wegvallen van die kracht hun oorspronkelijke vorm niet weer aannemen.

In Hoofdstuk IV wordt alleen de mechanica van starre continua behandeld. De mechanica van elastische- en stromende continua komt in het college "Continue Media" in het tweede jaar (nevenstroom) aan de orde.

Speciale aandacht wordt voorts besteed aan het centrale krachtveld volgens de $\frac{1}{r^2}$-wet:

de wet van Coulomb en de gravitatiewet van Newton die in Hoofdstuk V samen worden behandeld. In Hoofdstuk VI worden de implicaties van de gravitatiewet (wetten van Kepler) beschreven.

I.C. Dimensies en Eenheden

De waarneming van een fysisch verschijnsel is onvolledig als het niet resulteert in een kwantitatieve informatie. Om een dergelijke informatie te verkrijgen, moeten één of meer fysische grootheden worden gemeten. Als zulke grootheden rechtstreeks met elkaar kunnen worden vergeleken, worden ze getypeerd als van dezelfde dimensie te zijn en aangegeven met [ ]. Zo is bijvoorbeeld de hoogte van een bepaalde toren een bepaald aantal malen de lengte van een bepaald stuk touw.
Voor een groep grootheden met dezelfde dimensie kan een eenheid e gekozen worden. De verhouding van grootheid tot eenheid is de getalwaarde.
Voorbeeld: de periode T van een trilling wordt uitgedrukt als een getal T maal de eenheid van tijd e_t: de seconde.
Fysische grootheden van een bepaalde dimensie kunnen worden gecombineerd tot grootheden van andere dimensie. Zo wordt de dimensie van snelheid $[v]$ bepaald door $[v] = \frac{[l]}{[t]}$ waarbij l de dimensie van lengte en t die van tijd is. Met behulp van dimensies kunnen eenheden in elkaar worden uitgedrukt.

Bijvoorbeeld $e_v = \frac{e_l}{e_t}$: de eenheid van lengte gedeeld door de eenheid van tijd geeft de eenheid van snelheid: deze eenheden zijn dan zogenaamd coherent. Door uit te gaan van enige gronddimensies kan de dimensie van fysische grootheden worden weergegeven door het produkt of quotiënt van deze gronddimensies. De eenheden van grootheden met een gronddimensie kunnen vrij worden gekozen: dat zijn de zogenaamde grondeenheden. Coherente eenheden van alle andere grootheden volgen hieruit op dezelfde wijze als hun dimensies uit de gronddimensies. Zodoende verkrijgt men een coherent eenhedenstelsel. De grondeenheden van de mechanica zijn: de meter (m) als eenheid van lengte, de kilogram (kg) als eenheid van massa en de seconde (s) als eenheid van tijd. Volgens de bewegingswet van Newton $F = m.a$, is de (coherente) eenheid van kracht in dit stelsel dan die kracht die aan een massa van 1 kg een versnelling van 1 ms^{-2} geeft: deze krachteenheid is de Newton en dit stelsel is het MKS-stelsel. Samen met de eenheid van stroomsterkte, de Ampère, is dit het Giorgi stelsel van eenheden.
Dit stelsel verdient tegenwoordig de voorkeur boven het cgs-stelsel waar de basiseenheden zijn: centimeter, gram en seconde en de

eenheid van kracht de dyne is. 1 N = 10^5 dyne. Beide eenhedenstelsels, Giorgi en cgs worden in de fysica veel gehanteerd.

I.D. Scalairen en Vectoren Lit.: S 1, 7; AF 1; F 11; B 2.

Sommige fysische grootheden zijn volledig bepaald als hun grootte in een geschikt gekozen eenheid is uitgedrukt. Zulke grootheden worden scalairen genoemd. Voorbeelden hiervan zijn: massa, volume, elektrische lading, temperatuur, arbeid, potentiaal, enz. Andere fysische grootheden zijn pas volledig bepaald als behalve hun grootte ook een richting wordt aangegeven. Voorbeelden van zulke grootheden, die vectoren worden genoemd, zijn verplaatsing, snelheid, versnelling, kracht, elektrische veldsterkte, enz. De wetten die voor deze vectoriële grootheden gelden, worden bij voorkeur in vectornotatie geformuleerd. Het grote voordeel hiervan is dat deze formulering beknopt en doorzichtig is en onafhankelijk van de keuze van het coördinatensysteem. Voor de oplossing van veel problemen is het wel nodig om met componenten van de vectoren in een bepaald coördinatensysteem te werken. Er zijn ook fysische wetten waarbij de vectorformulering door het gecompliceerde verband tussen de richting van verschillende grootheden ontoereikend is. In zulke gevallen dient men bij de formulering zog. tensoren te gebruiken die beschouwd kunnen worden als een generalisatie van vectoren. In deze syllabus worden vectoren aangeduid met een letter waarboven een pijl is geplaatst.
Zo is $\vec{v}$ een vector waarvan de grootte (of absolute waarde of modulus) wordt aangegeven met $|\vec{v}|$ of eenvoudig v.

Een vector is dus een grootheid die zowel grootte als richting heeft, volkomen onafhankelijk van de keuze van een coördinatensysteem. Men moet evenwel bedenken dat niet alle grootheden die grootte en richting hebben noodzakelijk vectoren zijn. Zo is een eindige draaiingshoek (rotatie) een grootheid met grootte en richting, maar geen vector; zie Lit.: S 1 p. 10; B 2 p. 33.

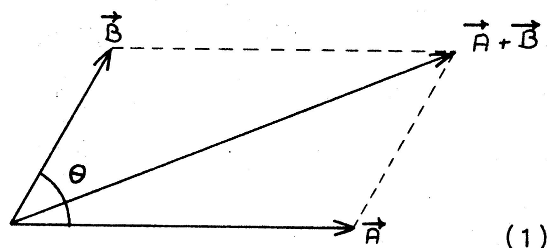
Vectoralgebra

Twee vectoren zijn gelijk als ze dezelfde grootte en richting hebben.

Optelling van vectoren

De som van twee vectoren $\vec{A}$ en $\vec{B}$ is een vector zoals in de figuur is aangegeven: de parallelogramconstructie.

$|\vec{A} + \vec{B}|^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$ (1)



Aftrekking van vectoren gaat volgens de regel $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$ (2)
waarbij de vector $-\vec{B}$ gelijk van grootte aan, doch tegengesteld van richting met $\vec{B}$ is.

Vectoroptelling is commutatief, d.w.z. $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ (3)

en associatief, d.w.z. $\vec{A} + (\vec{B}+\vec{C}) = (\vec{A}+\vec{B}) + \vec{C}$ (4)

Vermenigvuldiging van een vector $\vec{A}$ met een getal (scalair) k levert een vector op waarvan de richting gelijk is aan die van $\vec{A}$ en waarvan de grootte is $k|\vec{A}|$, dus $|k\vec{A}| = k|\vec{A}|$ (5)

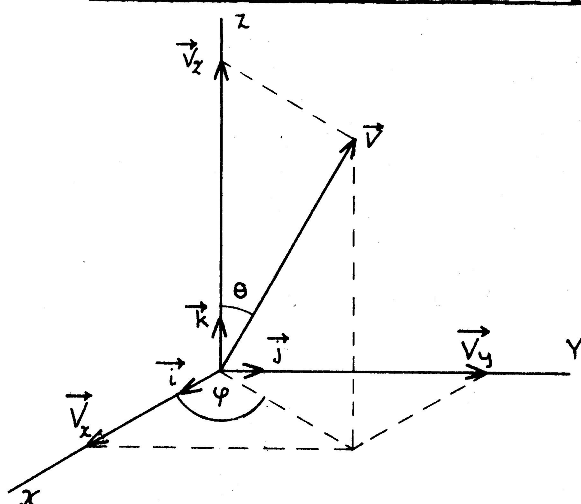
Als k een scalair is, geldt $k(\vec{A}+\vec{B}) = k\vec{A} + k\vec{B}$ (6)

d.w.z. vermenigvuldiging van een vector met een scalair is distributief.

Vectoren worden gebruikt om verplaatsingen in de euclidische (vlakke) ruimte te beschrijven. Een fysische grootheid kan door een vector worden voorgesteld als hij voldoet aan de volgende voorwaarden.

1. Parallelogramwet en commutativiteit voor de optelling.
2. Grootte en richting moeten onafhankelijk zijn van de keuze van het coördinatensysteem.

Ontbinding van vectoren in componenten



Bijvoorbeeld langs de assen van een Cartesisch coördinatenstelsel

$\vec{v} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z$ (7)

waarbij $\vec{i}$, $\vec{j}$ en $\vec{k}$ eenheidsvectoren zijn in resp. de X-, Y- en Z-richting.

De componenten hebben de waarde

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v\sin\theta\cos\phi \\ v_y &= v\sin\theta\sin\phi \\ v_z &= v\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \quad (9)$$

Bij de optelling van vectoren kunnen we gebruik maken van de componenten $\vec{A} + \vec{B} = \vec{i}(A_x + B_x) + \vec{j}(A_y + B_y) + \vec{k}(A_z + B_z)$ (10)

Differentiëren van een vector $\vec{v}$ naar de tijd:

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t_0 + \Delta t) - \vec{v}(t_0)}{\Delta t} \quad (11)$$

De conventie om afgeleiden naar de tijd met een punt aan te geven, wordt in deze syllabus gevolgd:

$\dot{\vec{v}} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt}$. In het geval van constante eenheidsvectoren (d.w.z. bij niet roterende stelsels) is $\dot{\vec{v}}$ een vector met als componenten de afgeleiden van de componenten van $\vec{v}$.

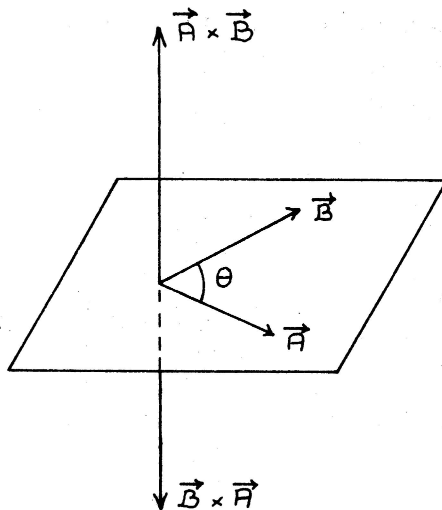
$$\dot{\vec{v}} = \vec{i}\dot{v}_x + \vec{j}\dot{v}_y + \vec{k}\dot{v}_z \quad (12)$$

Vermenigvuldiging van twee vectoren met elkaar

Zeer belangrijk in de fysica zijn twee verschillende soorten van vectorvermenigvuldiging:

1) Scalair produkt of in(wendig) produkt (Engels: scalar of dot product)
   Definitie: $\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\phi$ (13)
   waarbij ϕ de hoek is tussen de vectoren $\vec{A}$ en $\vec{B}$.
   Dit produkt is een scalaire grootheid; $\vec{A}$ en $\vec{B}$ hoeven dimensioneel geen gelijksoortige grootheden te zijn, bijv. $\vec{A}$ kan voor kracht staan, $\vec{B}$ voor weg, dan geeft het inprodukt $\vec{A}.\vec{B}$ de arbeid weer.
   Het scalair produkt heeft, zoals eenvoudig is aan te tonen, de volgende eigenschappen:
   $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$: Commutativiteit (14)
   $\vec{A}.\vec{A} = A^2$ (15); $(-\vec{A}).\vec{B} = -\vec{A}.\vec{B}$ (16) (15-16)
   $p(\vec{A}).\vec{B} = p(\vec{A}.\vec{B})$ voor reële waarden van p (17)
   $\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}.\vec{B} + \vec{A}.\vec{C}$: Distributiviteit (18)
   $\vec{A}.\vec{B} = (\vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z).(\vec{i}B_x + \vec{j}B_y + \vec{k}B_z) = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$ (19)
   daar $\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1$ en $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$
   $\frac{d}{dt}(\vec{A}.\vec{B}) = \dot{\vec{A}}.\vec{B} + \vec{A}.\dot{\vec{B}}$ als $\vec{A}$ en $\vec{B}$ differentieerbare vectoren zijn. (20)

2) Vectorprodukt of uit(wendig) produkt (Engels: vector of cross product)
   Definitie: $\vec{A}\times\vec{B}$ is een vector die loodrecht staat op het vlak door $\vec{A}$ en $\vec{B}$ en de richting heeft van de voortgaande beweging van een rechtse schroef bij een draaiing die de richting van $\vec{A}$ over de kleinste hoek in die van $\vec{B}$ overvoert.



De absolute waarde is

$$|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}| \sin\theta \qquad (21)$$

Uit deze definitie volgen de eigenschappen:

$|\vec{A}\times\vec{B}| = S$, de oppervlakte van het parallelogram gevormd door $\vec{A}$ en $\vec{B}$; (22)

$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$: Anticommutativiteit (23)

$\vec{A}\times-\vec{B} = -\vec{A}\times\vec{B}$ (24)

$\vec{A}\times\vec{A} = 0$ (25)

$\vec{C}\times(\vec{A}+\vec{B}) = \vec{C}\times\vec{A} + \vec{C}\times\vec{B}$: Distributiviteit (26)

$\vec{A}\times p\vec{B} = p(\vec{A}\times\vec{B}) = p\vec{A}\times\vec{B}$ voor reële waarden van p. (27)

$\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B}) = \dot{\vec{A}}\times\vec{B} + \vec{A}\times\dot{\vec{B}}$ als $\vec{A}$ en $\vec{B}$ differentieerbare vectoren zijn. (28)

Het vectorprodukt in componenten uitgeschreven heeft de volgende gedaante: $\vec{A}\times\vec{B} = (\vec{i}A_x + \vec{j}A_y + \vec{k}A_z) \times (\vec{i}B_x + \vec{j}B_y + \vec{k}B_z)$

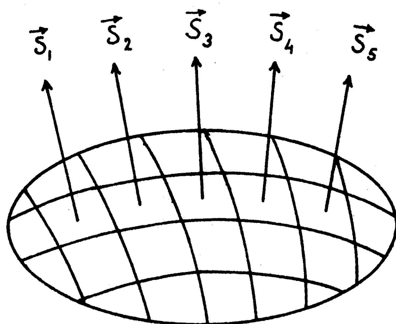
Nu is volgens de definitie van het vectorprodukt $\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$; $\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$; $\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$; $\vec{i}\times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} = \vec{k}\times\vec{k} = 0$. Dan volgt

$$\vec{A}\times\vec{B} = \vec{i}(A_yB_z - A_zB_y) - \vec{j}(A_xB_z - A_zB_x) + \vec{k}(A_xB_y - A_yB_x) \qquad (29)$$

In determinantvorm geschreven

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad (29a)$$

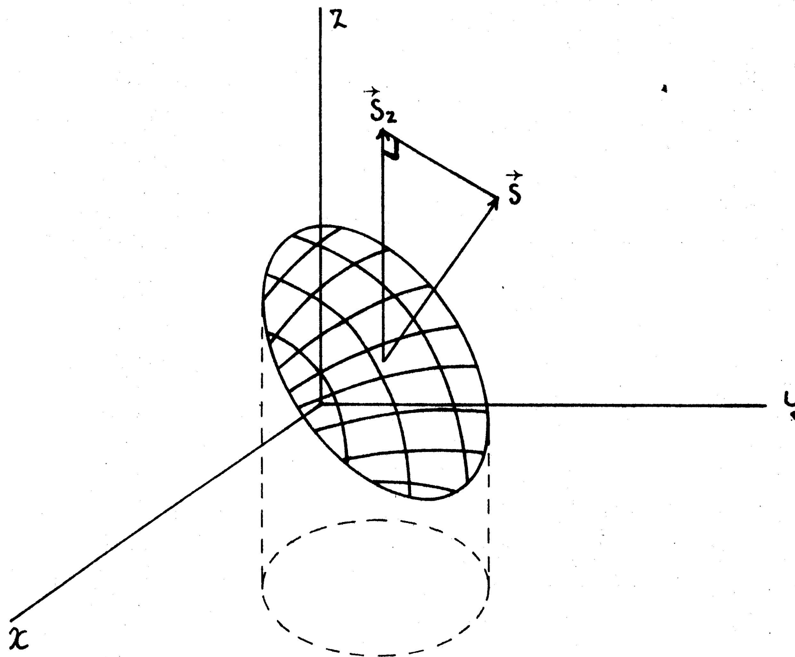
Het vectorprodukt is in grootte gelijk aan het oppervlak van het parallelogram gevormd door de beide vectoren. Dit suggereert dat een oppervlak door een vector kan worden gerepresenteerd. Als het oppervlak niet vlak is, kan het worden verdeeld in een groot aantal bijna vlakke oppervlakte-elementjes elk voorgesteld door een vector. De vector



$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 + \ldots = \sum_i \vec{S}_i \qquad (30)$$

is weliswaar niet de totale oppervlakte van het gebogen oppervlak,

maar de componenten van $\vec{S}$ zijn de projecties van het gebogen oppervlak op de drie (vlakke) coördinaatvlakken.



Voor een gesloten oppervlak geldt dat

$$\vec{S} = \sum_i \vec{S}_i = 0 \quad \text{is.} \tag{31}$$

Het gesloten oppervlak kan namelijk weer in kleine vlakjes worden verdeeld elk gepresenteerd door de vector $\vec{S}_i$ naar buiten gericht. Door combinaties van twee vlakjes te nemen met tegengesteld gerichte component van $\vec{S}_i$ kan het gestelde eenvoudig worden bewezen.

II. MECHANICA VAN ÉÉN DEELTJE

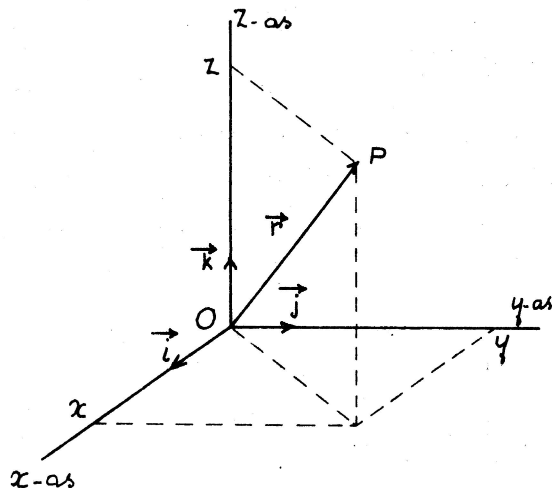
In dit hoofdstuk wordt de mechanica van één deeltje behandeld, waarbij een deeltje (ook wel massapunt of puntmassa genoemd) die idealisatie is van een werkelijk object waarbij de afmetingen van het object wel, maar de massa niet wordt verwaarloosd.

II.A. Kinematica Lit.: S 1; AF 1.

II.A. 1. Plaats en beweging

Plaats is een relatief begrip en geeft een ruimtelijk verband aan met andere objecten die een referentiesysteem vormen. De plaatsbepaling van een deeltje kan geschieden met behulp van een plaatsvector of coördinaten in een coördinatenstelsel. Veel gebruikte coördinaten zijn:

1. Cartesische coördinaten x, y, z in een stelsel met drie onderling loodrechte assen X, Y en Z. $\vec{r}$ is de plaatsvector (radius vector, voerstraal) van het punt P. De Cartesische coördinaten (x,y,z) van het punt P zijn tevens de componenten van $\vec{r}$.



$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z \qquad (1)$$

$$r \equiv |\vec{r}| = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (2)$$

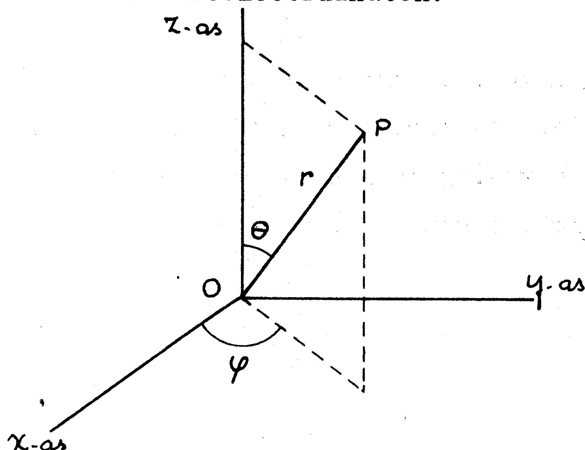
Als de hoeken tussen $\vec{r}$ en de assen X, Y en Z resp. α, β en γ zijn, is

$$x = r\cos\alpha; \; y = r\cos\beta; \; z = r\cos\gamma; \qquad (3)$$

de richtingscosinussen van $\vec{r}$.

De vectornotatie $\vec{r}$ van de plaats P is equivalent met de notatie (x,y,z).

2. Poolcoördinaten.



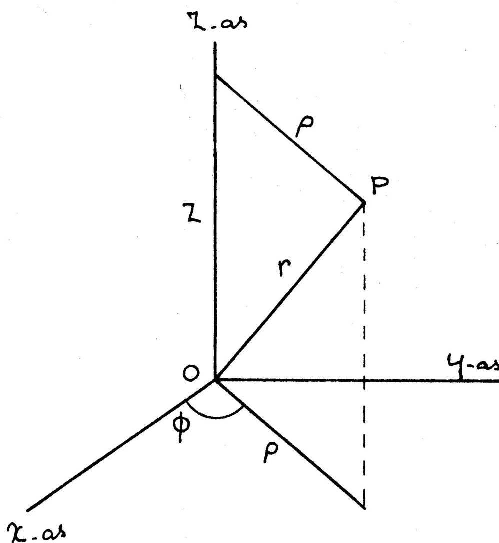
Hierbij worden onderscheiden

a) Bolcoördinaten (sferische coördinaten) r, θ, ϕ.

$r = OP$; θ is de hoek die OP maakt met de Z-as: $0 \leq \theta \leq \pi$; ϕ is de hoek die de projectie van OP op het XY-vlak maakt met de +X-as: $0 \leq \phi < 2\pi$.

Dan is $z = r\cos\theta$; $x = r\sin\theta \cos\phi$;

$$y = r\sin\theta \sin\phi \qquad (4)$$



b) Cylindercoördinaten z, ρ, ϕ.

z is de z-coördinaat van P: $-\infty < z < \infty$.

ρ is de projectie van OP op het XY-vlak

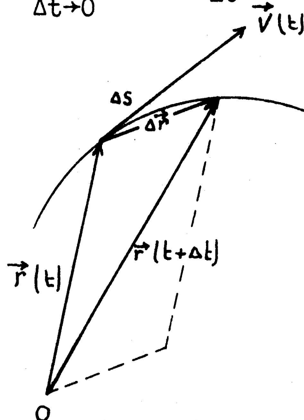
$\rho \geqq 0$. ϕ is de hoek tussen ρ en de X-as

$0 \leqq \phi < 2\pi$.

$$x = \rho\cos\phi;\ y = \rho\sin\phi;\ z = z \qquad (5)$$

<u>Beweging</u> van een deeltje is verandering van de plaats van dit deeltje met de tijd. Als de plaats van het deeltje wordt aangeduid met de plaatsvector $\vec{r}$ is de <u>snelheid</u> gedefinieerd als $\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}}$, d.w.z.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = \vec{e}_t . v \qquad (6)$$



v is de grootte van de snelheid, terwijl de richting die is van de eenheidsvector $\vec{e}_t$ die raakt aan de baan van het deeltje. Daar $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$ is de uitdrukking voor de snelheid in componenten $\vec{v} = \vec{i}\dot{x} + \vec{j}\dot{y} + \vec{k}\dot{z}$ en geldt

$$v = (v_x^{\ 2} + v_y^{\ 2} + v_z^{\ 2})^{\frac{1}{2}} \qquad (7)$$

met $\dot{x} = v_x$; $\dot{y} = v_y$ en $\dot{z} = v_z$.

Op analoge wijze is de <u>versnelling</u> $\vec{a}$ gedefinieerd volgens $\vec{a} \equiv \dot{\vec{v}}$. Dus is $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$; de waarde van a is $a = (a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2})^{\frac{1}{2}}$ (8)

De bovenstaande uitdrukkingen voor snelheid en versnelling zijn geldig zowel voor rechtlijnige als kromlijnige bewegingen. De formules voor de rechtlijnige beweging kunnen zonder vectornotatie in één coördinaat als volgt worden geformuleerd:

$$v = \dot{x}; \quad \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v dt \quad \text{dus} \quad x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v dt \qquad (9)$$

$$a = \dot{v}; \quad \int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a dt \quad \text{dus} \quad v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a dt \qquad (10)$$

Als a constant is en $\neq 0$ is de beweging eenparig versneld en worden de uitdrukkingen:

$$\boxed{v = v_0 + at} \qquad (11)$$

en $\boxed{x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2}$ (t_0 en x_0 zijn = 0 gesteld). (12)

Voor kromlijnige bewegingen worden de volgende formules gebruikt:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}; \quad \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{v} dt \quad \text{dus} \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{v} dt \qquad (13)$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}}; \quad \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \vec{a} dt \quad \text{dus} \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{a} dt \qquad (14)$$

Als $\vec{a}$ constant is worden de uitdrukkingen voor $\vec{r}$ en $\vec{v}$ met $t_0 = 0$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2} \qquad (15)$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t} \qquad (16)$$

Als nu $\vec{v}_0$ en $\vec{a}$ een verschillende richting hebben, is de beweging kromlijnig. $\vec{v}$ ligt in het vlak door $\vec{v}_0$ en $\vec{a}$ en het eindpunt van de vector $\vec{r}$ ligt dus ook in dit vlak. De beweging met constante versnelling $\vec{a}$ vindt dus in een plat vlak plaats. Door één coördinaatas in de richting van $\vec{a}$ te nemen en één er loodrecht op, kan worden ingezien dat de baan een parabool is.

In sommige gevallen is het nuttig de snelheid en de versnelling op een andere manier in componenten te ontbinden.

1e. Snelheid en versnelling worden elk uitgedrukt in hun twee componenten in een stelsel van vlakke poolcoördinaten (met coördinaten r en θ).

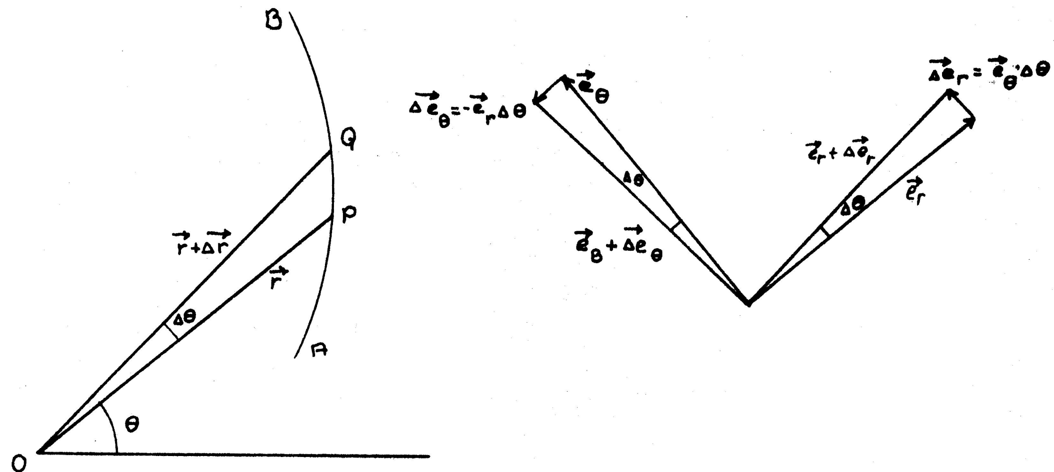
Beweging van een deeltje langs de baan AB.

Plaatsvector $\vec{OP} = \vec{r} = r\vec{e}_r$ (17)

$\vec{e}_r$ is de eenheidsvector in de richting van $\vec{r}$; $\vec{e}_\theta$ is de eenheidsvector die loodrecht op $\vec{e}_r$ staat. Uit de figuur volgt

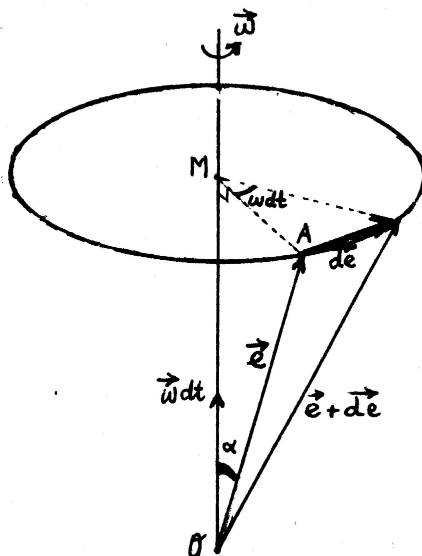
$\dot{\vec{e}}_r = \vec{e}_\theta\dot{\theta}$ en (18)

$\dot{\vec{e}}_\theta = -\vec{e}_r\dot{\theta}$; de tijdafgeleide van een in richting variërende (19) eenheidsvector $\vec{e}$ is een vector die loodrecht staat op $\vec{e}$.



Bewijs: $(\vec{e}.\vec{e}) = 1$. Differentiëren van deze uitdrukking naar de tijd geeft $2\,\vec{e}.\dot{\vec{e}} = 0$, dus $\vec{e}$ en $\dot{\vec{e}}$ staan loodrecht op elkaar daar $\dot{\vec{e}} \neq 0$ is.

De differentiatie van een eenheidsvector naar de tijd kan ook worden geformuleerd met vectoralgebra: $\dot{\vec{e}} = \vec{\omega} \times \vec{e}$.
Het bewijs hiervan gaat als volgt.
$\vec{e}$ is wel constant in grootte maar niet in richting.



$d\vec{e} = \vec{\omega}dt \times \vec{e}$

$MA = e \sin\alpha$

Door het uitprodukt van $\vec{\omega}dt$ en $\vec{e}$ wordt $d\vec{e}$ naar grootte en richting exact geformuleerd.

$$\boxed{\frac{d\vec{e}}{dt} \equiv \dot{\vec{e}} = \vec{\omega} \times \vec{e}} \quad (20)$$

De uitdrukking voor de snelheid wordt nu verkregen door $\vec{r}$ naar de tijd te differentiëren.

$$\vec{r} = r\vec{e}_r \qquad (21)$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = r\dot{\vec{e}}_r + \vec{e}_r\dot{r} = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\vec{e}_r \qquad (22)$$

De snelheid staat hier geschreven in twee componenten, de radiale component $v_r = \dot{r}$ en de azimutale component $v_\theta = r\dot{\theta}$. Men kan het zo opvatten dat $\vec{v}$ hier gesplitst is in een translatiesnelheid v_r en een rotatie (hoek)snelheid $\dot{\theta}$.

De versnelling wordt op analoge wijze verkregen door de snelheidsvector naar de tijd te differentiëren.

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\vec{e}}_\theta + \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\vec{e}}_r =$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta \qquad (23)$$

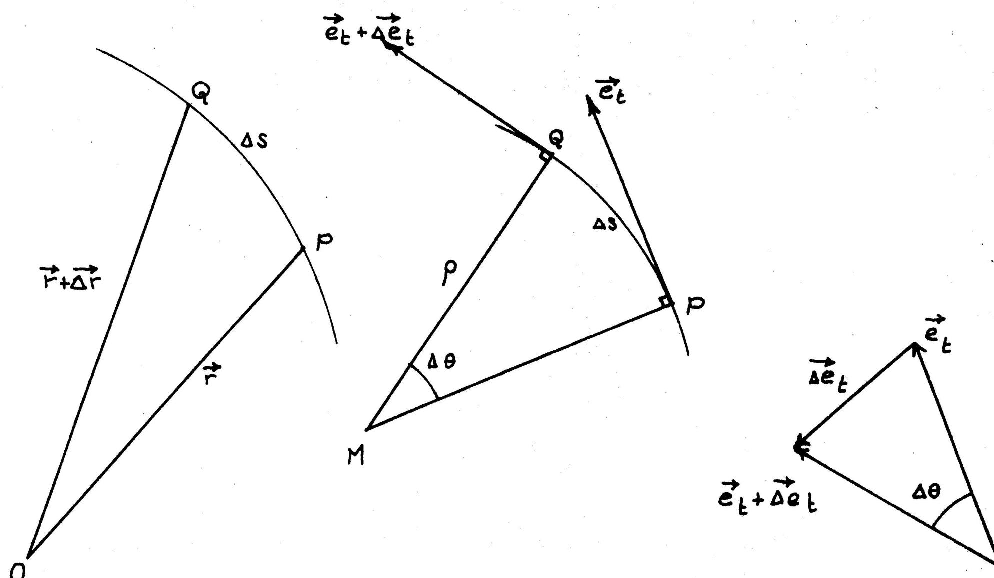
De versnelling $\vec{a}$ heeft dus vier termen in twee componenten:

1. $\ddot{r}\vec{e}_r$: de radiaal naar buiten gerichte versnelling.
2. $-r\dot{\theta}^2\vec{e}_r$: de radiaal naar binnen gerichte versnelling.
3. $r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$: de azimutaal (transversaal) gerichte versnelling tengevolge van de hoekversnelling $\ddot{\theta}$.
4. $2\dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta$: de azimutaal (transversaal) gerichte versnelling tengevolge van de snelheid $\dot{r}$ en de hoeksnelheid $\dot{\theta}$.

Voor een eenparige cirkelbeweging is $\dot{r} = 0$, $\ddot{r} = 0$ en $\ddot{\theta} = 0$ en is de centripetale versnelling (no. 2) de enige versnellingsterm $\neq 0$.

Bij de ontbinding van snelheid en versnelling in x, y en z componenten in een Cartesisch coördinatenstelsel zijn de x, y en z as constant van richting, terwijl bij de ontbinding in r- en θ-componenten de r-richting en de θ-richting met de plaats van het deeltje veranderen. Daardoor veranderen ook de eenheidsvectoren $\vec{e}_r$ en $\vec{e}_\theta$ zodat hun tijdafgeleiden $\neq 0$ zijn.
Dit geldt ook voor de volgende manier van ontbinding:

2e. Snelheid en versnelling worden uitgedrukt in componenten tangentieel en normaal ten opzichte van de baan



$\vec{e}_t$ is de eenheidsvector die in elk punt raakt aan de baan s

$|\vec{e}_t| = 1$, dus $\Delta\vec{e}_t \perp \vec{e}_t$. Snelheid $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = (\frac{d\vec{r}}{ds}).\dot{s}$; $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{e}_t$

$\dot{s} = v$ is de scalaire snelheid $\boxed{\vec{v} = v\vec{e}_t}$ (24)

Versnelling $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \frac{d}{dt}(v\vec{e}_t) = \dot{v}\vec{e}_t + v\dot{\vec{e}}_t$

$\dot{\vec{e}}_t = \frac{d\vec{e}_t}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$; $\frac{d\vec{e}_t}{d\theta} = \vec{e}_n$ is de eenheidsvector die loodrecht op de baan staat. $\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho}$ is de kromming van de baan in dat punt, ρ is de kromtestraal.

$\frac{ds}{dt} = v$ is de scalaire snelheid, dus $\dot{\vec{e}}_t = \vec{e}_n \frac{v}{\rho}$ (25)

$\boxed{\vec{a} = \dot{v}\vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n}$ (26)

De eerste term, de tangentiële versnelling, raakt aan de baan, de tweede term, de centripetale versnelling, staat loodrecht op de baan en is naar binnen gericht.

Uitdrukking voor de kromtestraal ρ in Cartesische coördinaten

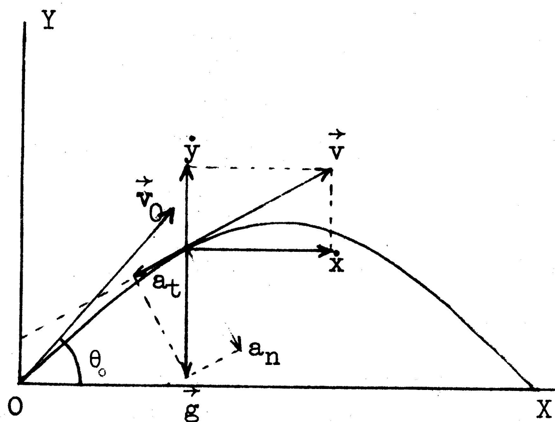
$$\rho = \frac{ds}{d\theta} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{d\theta} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}\frac{dx}{d\theta} = \{1 + (\frac{dy}{dx})^2\}^{\frac{1}{2}} . \frac{dx}{d\theta}$$

$\frac{dy}{dx} = y' = tg\theta$; $\theta = \text{arctg } y'$; $\frac{d\theta}{dx} = \frac{y''}{1 + y'^2}$; $\frac{dx}{d\theta} = \frac{1 + y'^2}{y''}$,

dus $\rho = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}$ (27)

Twee eenvoudige voorbeelden van bewegingen die in de fysica veel voorkomen, zijn de paraboolbeweging (kogelbaan) en de cirkelbeweging.

1. De paraboolbeweging (kogelbaan): een deeltje wordt op tijdstip $t = 0$ met een snelheid $\vec{v}_0$ weggeschoten. In de Y-richting is de versnelling constant (bijv. $-g$, de versnelling van de vrije val) terwijl de versnelling in de X-richting nul is.



$x = v_0 t\cos\theta_0$ (28)

$y = v_0 t\sin\theta_0 - \frac{1}{2}gt^2$ (29)

Eliminatie van t geeft de (parabool) vergelijking van de kogelbaan:

$y = x\,tg\theta_0 - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}x^2$. (30)

De tangentiële en normale component van de constante versnelling $\vec{g}$ kunnen voor elk punt van de baan berekend worden.

Vectorieel opgeteld geven ze de constante vector $\vec{g}$.

$\dot{x} = v_0\cos\theta$; $\dot{y} = v_0\sin\theta - gt$, dus $v = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{1}{2}} =$

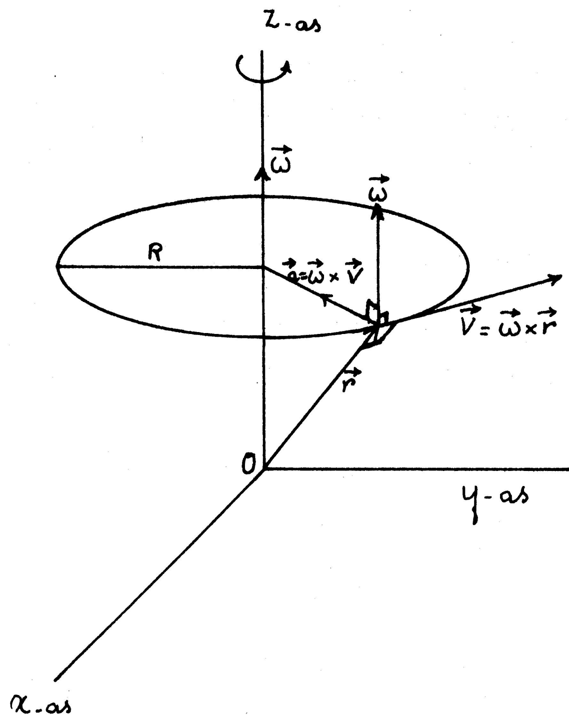
$= \{v_0^2\cos^2\theta + (v_0\sin\theta - gt)^2\}^{\frac{1}{2}}$. (31)

$a_n = \frac{v^2}{\rho}$. Ook is $a_n = g\cos\theta = \frac{g\dot{x}}{v}$; dus is $\rho = \frac{v^3}{g\dot{x}}$.

$\frac{1}{\rho} = \frac{g\dot{x}}{v^3} = \frac{gv_0\cos\theta}{\{v_0^2\cos^2\theta + (v_0\sin\theta - gt)^2\}^{3/2}}$. (32)

$\frac{1}{\rho}$ is maximaal als de noemer $\{\ ...\ \}^{3/2}$ minimaal is; dit is het geval voor $t = \frac{v_0\sin\theta}{g}$, waarbij $\dot{y} = 0$ is; dat is in de top van de parabool.

2. De cirkelbeweging.



$\vec{v} = v\vec{e}_t$; $v = R\dot{\theta} = R\omega$.

De hoeksnelheid $\vec{\omega}$ is een vector die loodrecht staat op het vlak van beweging en de richting heeft van een rechtse schroef die draait in de richting waarin het deeltje beweegt.

Algemeen geldt

$$\vec{v} \equiv \dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (33)$$

als $\vec{r}$ constant van grootte is.

In het geval dat ω niet constant is, is de hoekversnelling $\alpha = \dot{\omega} \neq 0$.

$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$. Als α constant is (eenparig versnelde rotatie) worden de kinematische rotatie-formules:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_{t_0}^{t} \alpha dt = \alpha(t - t_0) \text{ dus}$$

$$\boxed{\omega = \omega_0 + \alpha(t - t_0)} \qquad (34)$$

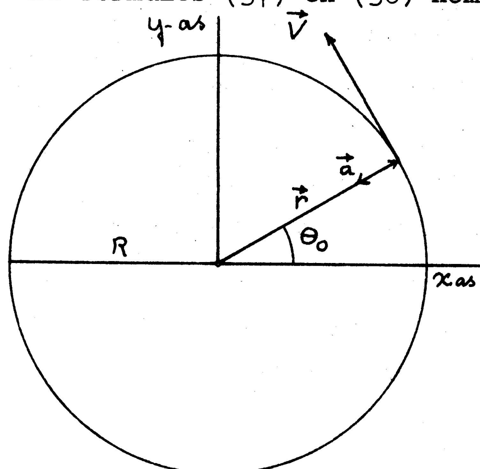
$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} \omega_0 dt + \alpha\int_{t_0}^{t}(t-t_0)dt; \text{ dus } \boxed{\theta = \theta_0 + \omega_0(t-t_0) + \tfrac{1}{2}\alpha(t-t_0)^2} \qquad (35)$$

Dit zijn de uitdrukkingen voor de hoeksnelheid en de hoekpositie als functie van de tijd voor een eenparig versnelde rotatie.

In het geval van de eenparige cirkelbeweging is $\dot{\vec{\omega}} = 0$. Dan is $\vec{a} \equiv \dot{\vec{v}} = \vec{\omega} \times \vec{v}$. Met $\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$ wordt dit $\vec{a} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$, (36) de centripetaalversnelling die naar het centrum toe gericht is. Deze uitdrukking (36) geldt zeer algemeen, ook voor niet cirkel-bewegingen. Voor de eenparige cirkelbeweging is $\vec{\omega} \perp \vec{v}$ en $\vec{v} \perp \vec{r}$.

Dan is $v = \omega R$ (37) en $a = \omega^2 R$ (38) (37-38)

De formules (37) en (38) komen ook voort uit de volgende beschouwing:



De componenten van de momentane plaatsvector zijn:

$x = R\cos(\omega t + \theta_0)$ (39)

$y = R\sin(\omega t + \theta_0)$ (40)

θ_0 geeft de beginpositie aan $(t = 0)$; ω is de hoeksnelheid, R de straal van de cirkel.

$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y = \vec{i}R\cos(\omega t + \theta_0) + \vec{j}R\sin(\omega t + \theta_0)$ (41)

$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = - \vec{i}\omega R\sin(\omega t + \theta_0) + \vec{j}\omega R\cos(\omega t + \theta_0)$ (42)

$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = - \vec{i}\omega^2 R\cos(\omega t + \theta_0) - \vec{j}\omega^2 R\sin(\omega t + \theta_0)$ (43)

Hieruit volgt

$\vec{r} \times \vec{v} = \vec{k}\omega R^2$ $\vec{k}\omega$ is een vector in de Z-richting ter grootte

$\omega = \frac{v}{R}$ (44); $\vec{r}.\vec{v} = 0$, dus $\vec{v} \perp \vec{r}$. (44)

$\vec{a} = - \omega^2\vec{r}$, dus $a = \omega^2 R$ (45); $\vec{a}$ en $\vec{r}$ hebben tegengestelde richting. (45)

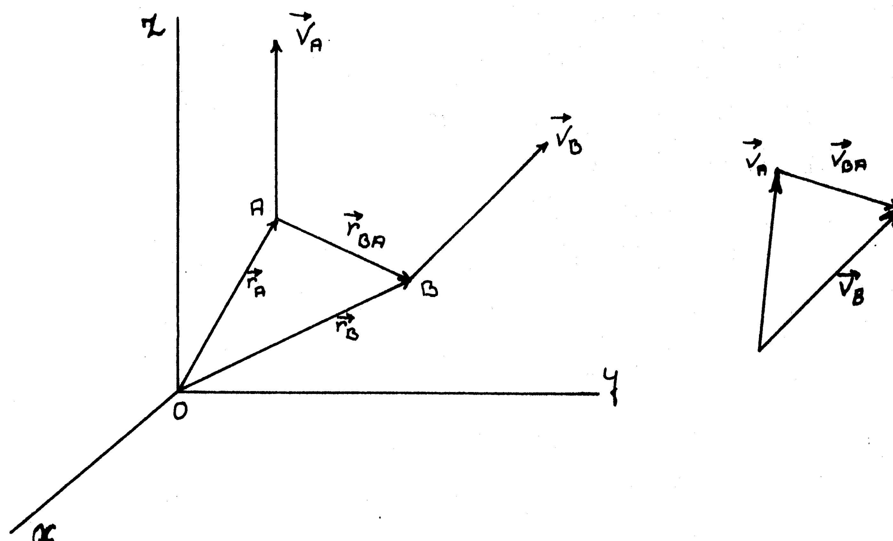
II.A. 2. Transformatie van plaats en beweging Lit.: AF 2; S 1,7; B 3.

Plaats en beweging zijn relatieve grootheden en hangen af van het referentiesysteem (coördinatensysteem) ten opzichte waarvan ze worden gemeten. De vraag is nu hoe verschillende waarnemers, die zich bevinden in de oorsprong van verschillende coördinatensystemen die ten opzichte van elkaar bewegen, plaats en beweging waarderen.

De mogelijkheid een absoluut referentiesysteem te definiëren dat in rust is ten opzichte van de lege ruimte, is gebleken een fictie te zijn, aangezien er in een lege ruimte geen referentiepunten zijn.

Relatieve snelheid en versnelling.

Gegeven twee objecten A en B en een waarnemer O in de oorsprong van een rechthoekig coördinatenstelsel, X, Y, Z.



De plaats van A en B wordt bepaald door de plaatsvectoren $\vec{r}_A$ en $\vec{r}_B$; de plaats van B ten opzichte van A wordt gedefinieerd door $\vec{r}_{BA}$ en en analoog de plaats van A ten opzichte van B door $\vec{r}_{AB}$.

$$\left.\begin{aligned}\vec{r}_{BA} &= \vec{r}_B - \vec{r}_A \\ \vec{r}_{AB} &= \vec{r}_A - \vec{r}_B\end{aligned}\right\} \quad \text{Dus is} \quad \vec{r}_{AB} = -\,\vec{r}_{BA} \tag{46}$$

Differentiëren naar de tijd:

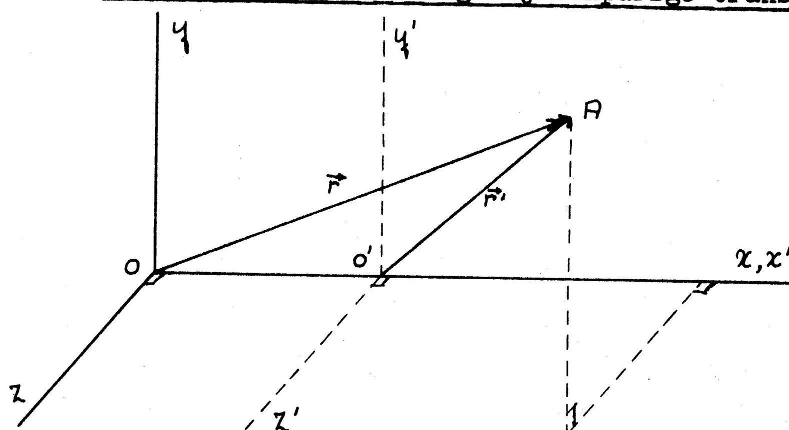
$$\vec{v}_{BA} = \vec{v}_B - \vec{v}_A; \quad \vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B \quad \text{dus} \quad \vec{v}_{AB} = -\vec{v}_{BA} \tag{47}$$

Nogmaals differentiëren:

$$\vec{a}_{BA} = \vec{a}_B - \vec{a}_A; \quad \vec{a}_{AB} = \vec{a}_A - \vec{a}_B \quad \text{dus} \quad \vec{a}_{BA} = -\vec{a}_{AB} \tag{48}$$

De snelheid van B ten opzichte van A, $\vec{v}_{BA}$, is gelijk en tegengesteld aan de snelheid van A ten opzichte van B, $\vec{v}_{AB}$, en hetzelfde geldt voor de versnelling.

Snelheid en versnelling bij eenparige translatie



Twee waarnemers O en O' die zich ten opzichte van elkaar met eenparige snelheid bewegen en geen rotatie ten opzichte van elkaar uitvoeren.
O ziet O' bewegen met snelheid $\vec{v}$ in de X-richting.

De X-as is gekozen in de richting van deze snelheid.
O' ziet O bewegen met snelheid $-\vec{v}$. Dan is $\vec{OO'} = \vec{v}t$ met $\vec{v} = \vec{i}v$ ($\vec{i}$ is de eenheidsvector in de X-richting). Voor de plaatsvectoren $\vec{r}$ en $\vec{r}'$ van het deeltje A geldt $\boxed{\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t}$ (49)
Deze vectorvergelijking geeft de zog. Galilei transformatie van de snelheid. Deze transformatie geldt in de niet-relativistische mechanica. Daar voor beide waarnemers O en O' de tijd dezelfde is, hoeft geen onderscheid gemaakt te worden tussen t en t'. Dit in tengestelling tot de relativistische mechanica waar de Lorentz transformatie in de plaats komt van de Galilei transformatie en de tijd wel transformeert.
Deze vectorvergelijking (29) kan geschreven worden in de componentenvergelijkingen: $x' = x - vt$; $y' = y$; $z' = z$ (50)
Differentiëren van (29) geeft $\boxed{\vec{V}' = \vec{V} - \vec{v}}$ (51)
waarbij $\vec{V}'$ en $\vec{V}$ de snelheid is van A ten opzichte van resp. O' en O.
Nogmaals differentiëren geeft $\boxed{\vec{a}' = \vec{a}}$ als $\vec{a}'$ en $\vec{a}$ de versnelling is van A ten opzichte van resp. O' en O. (52)

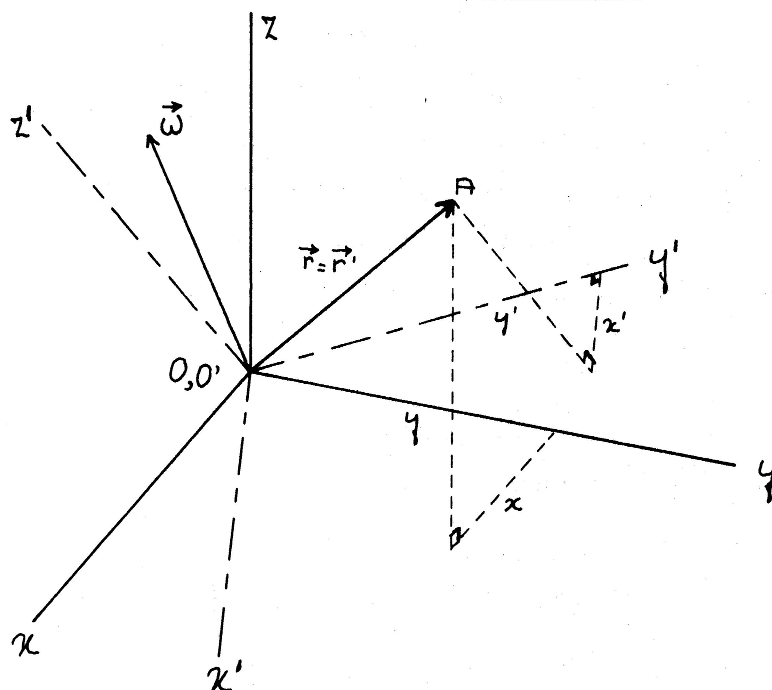
Hiermee is bewezen dat de versnelling van een deeltje dezelfde is voor alle waarnemers die zich ten opzichte van elkaar eenparig rechtlijnig bewegen. Anders geformuleerd: de versnelling is invariant voor eenparige translatie van het coördinatenstelsel.
Als de beide stelsels ten opzichte van elkaar niet eenparig bewegen, maar bijvoorbeeld eenparig versneld, wordt formule (51)

$\vec{V}' = \vec{V} - \vec{v}_0 - \vec{a}_0 t$ (53)

en differentiëren van (33) geeft: $\boxed{\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_0}$ (54)

Algemeen kan worden gesteld dat de versnelling niet invariant is voor niet-eenparige translatie.

Snelheid en versnelling bij eenparige rotatie



Twee waarnemers O en O' in hetzelfde punt die ten opzichte van elkaar roteren zonder translatie.
O ziet het stelsel X'Y'Z' roteren met hoeksnelheid $\vec{\omega}$. Omgekeerd ziet O' het stelsel XYZ roteren met hoeksnelheid $-\vec{\omega}$. $(\vec{r} = \vec{r}')$
De plaatsvector van A in het stelsel XYZ is $\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z$ (55)
De plaatsvector van A in het stelsel X'Y'Z' $\vec{r} = \vec{i}'x' + \vec{j}'y' + \vec{k}'z'$ (56)

O' meet als snelheid van A in zijn eigen stelsel X'Y'Z':

$\vec{V}' = \vec{i}'\dot{x}' + \vec{j}'\dot{y}' + \vec{k}'\dot{z}'$ 5 (57)

de eenheidsvectoren in het stelsel X'Y'Z' zijn voor O' constant. Voor O daarentegen roteert het stelsel X'Y'Z' en O ziet de eenheidsvectoren in het stelsel X'Y'Z' veranderen. Dan is voor O de snelheid van A: $\vec{V} = \vec{i}'\dot{x}' + \vec{j}'\dot{y}' + \vec{k}'\dot{z}' + \dot{\vec{i}}'x' + \dot{\vec{j}}'y' + \dot{\vec{k}}'z'$ (58)

Nu is $\dot{\vec{i}}' = \vec{\omega}\times\vec{i}'$; $\dot{\vec{j}}' = \vec{\omega}\times\vec{j}'$; $\dot{\vec{k}}' = \vec{\omega}\times\vec{k}'$, daar de tijdafgeleide van een eenheidsvector loodrecht op deze eenheidsvector staat (zie p. 15) en stelsel X'Y'Z' ten opzichte van XYZ met hoeksnelheid $\vec{\omega}$ roteert.

Dus is $\vec{V} = \vec{V}' + \vec{\omega}\times\vec{r}$ en $\boxed{\vec{V}' = \vec{V} - \vec{\omega}\times\vec{r}.}$ (59)

Op analoge wijze kan het verband tussen $\vec{a}$ en $\vec{a}'$ worden verkregen:

$\vec{a} = \dot{\vec{V}} = \dot{\vec{V}}' + \vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}$ (60)

Nu is $\dot{\vec{V}}' = \vec{i}'\dot{V}'_{x'} + \vec{j}'\dot{V}'_{y'} + \vec{k}'\dot{V}'_{z'} + \dot{\vec{i}}'V'_{x'} + \dot{\vec{j}}'V'_{y'} + \dot{\vec{k}}'V'_{z'}$ (61)

De eerste drie termen in het rechterlid zijn samen $\vec{a}'$,
de laatste drie $\vec{\omega}\times\vec{V}'$, dus

$\dot{\vec{V}}' = \vec{a}' + \vec{\omega}\times\vec{V}'$ (62)

Substitutie van (62) in (60) geeft:

$\vec{a} = \dot{\vec{V}} = \vec{a}' + \vec{\omega}\times\vec{V}' + \vec{\omega}\times\dot{\vec{r}}$ (63)

Nu is $\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}} = \vec{\omega}\times(\vec{V}' + \vec{\omega}\times\vec{r}) = \vec{\omega}\times\vec{V}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$, zodat de uitdrukking voor $\vec{a}$ tenslotte wordt

$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega}\times\vec{V}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ of $\boxed{\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega}\times\vec{V}' - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}$ (64)

De tweede term in het rechterlid is de Coriolis versnelling, de derde term de centrifugale versnelling.

Uit deze beschouwing volgt dat de versnelling niet invariant is voor eenparige rotatie.

Een belangrijk voorbeeld is de beweging ten opzichte van de draaiende aarde. Zie Hoofdstuk II.B.7.

II.B. Dynamica

Lit.: AF 3,4,5,8; S 2,3,4,5; F 4,7,9,10,12,13,14; B 4,5,6,7.

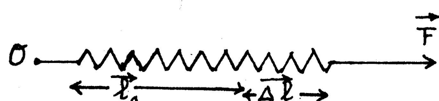
II.B. 1. Kracht en beweging

De dynamica is dat onderdeel van de mechanica waar het verband tussen beweging en oorzaak van de beweging bestudeerd wordt. De verandering van de snelheid van een deeltje of lichaam is het gevolg van een wisselwerking met andere deeltjes of lichamen. Nu letten we bij de wisselwerking van twee of meer deeltjes meestal op de beweging van slechts één deeltje, hetzij omdat we de andere deeltjes niet kunnen waarnemen òf omdat we deze opzettelijk buiten beschouwing laten. Het effect van deze wisselwerking op dit ene deeltje wordt nu met behulp van de grootheid kracht geformuleerd.

Het begrip kracht is, hoewel een essentieel bestanddeel van de dynamica, moeilijk scherp te definiëren. Door de spierwerking hebben we er van nature een kwalitatieve voorstelling van. Immers door de werking van spieren kunnen we een voorwerp dat in rust is in beweging brengen of een bestaande beweging veranderen. De invloed die we dan op het voorwerp uitoefenen, interpreteren we als kracht. Zo'n invloed kan ook door een motor of de wind of stromend water worden uitgeoefend. Ook het vallen van een voorwerp alsmede de weerstand die bewegende objecten ondervinden als ze over een ruw oppervlak of door gas of vloeistof (visceuse media) bewegen, wordt aan krachten toegeschreven. De veronderstelling dat al deze verschillende krachten voor de wetten der mechanica over één kam kunnen worden geschoren, wordt gerechtvaardigd doordat gebleken is dat de conclusies, die op deze veronderstelling zijn gebaseerd, in overeenstemming zijn met de ervaring.

De omschrijving van het begrip kracht blijft hiermee weliswaar nog vaag maar de grootheid kracht krijgt meer fysische betekenis door de mogelijkheid van kwantitatieve meting.

Zo kan kracht gedefinieerd worden aan de hand van een eenduidig meetrecept, bijvoorbeeld als de vector $\vec{F}$ die bepaald wordt door de uitrekking $\Delta\vec{l}$ van een standaardveer van onbelaste lengte $\vec{l}_0$, waarop in het ene uiteinde een kracht werkt en die in het andere uiteinde O wordt vastgehouden. De vector $\Delta\vec{l}$ geeft de grootte en richting van de veer-uitrekking aan.



De kracht $\vec{F}$ wordt dus op de verplaatsingsvector $\Delta\vec{l}$ afgebeeld.

$$\vec{F} = C.\Delta\vec{l} \qquad (1)$$

als de veer vrij in alle richtingen kan worden uitgerekt.

Maar hiermee zijn de problemen omtrent de definitie van het begrip kracht op de elastische eigenschappen van de veer "afgebeeld". Door nu de wetten van Newton op een geschikte manier te formuleren kan het begrip kracht aanzienlijk aan duidelijkheid winnen.

II.B. 2. De wetten van Newton

De klassieke mechanica is gebaseerd op empirisch gefundeerde **axioma's**: de vier wetten van Newton.

1. Een vrij deeltje -- dat is een deeltje waarop geen kracht werkt -- verkeert in rust of in een eenparige rechtlijnige beweging: de versnelling van het deeltje is nul.
   Deze wet wordt de traagheidswet genoemd.
2. Een deeltje waarop een kracht $\vec{F}$ werkt, ondergaat een verandering in zijn bewegingstoestand. Om dit nu algemeen te formuleren, voeren we de grootheid impuls in, dat is een vectorgrootheid $\vec{p}$, gedefinieerd als

   $$\vec{p} \equiv m\vec{v} \qquad (2)$$

   waarbij m de massa van het deeltje is en $\vec{v}$ zijn snelheid

   (in de relativistische mechanica is $\vec{p} = m_0\vec{v}(1 - \frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$ (3)
   met m_0 de rustmassa van het deeltje en c de lichtsnelheid).
   De formulering van de tweede wet van Newton is

   $$\boxed{\vec{F} = \dot{\vec{p}}} \qquad (4)$$

Deze wet -- die krachtwet, bewegingswet of bewegingsvergelijking wordt genoemd -- geeft het verband tussen de dynamische grootheid kracht en de kinematische grootheid impuls aan. Als m constant is, krijgen we de bekende formule

$$\vec{F} = m\vec{a}; \qquad (5)$$

als m met de tijd verandert, bijvoorbeeld bij raketten of relativistische deeltjes, wordt de uitdrukking

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m\vec{a} + \dot{m}\vec{v}. \qquad (6)$$

Het begrip kracht kan zeer algemeen gedefinieerd worden met behulp van de formule

$\vec{F} \equiv \dot{\vec{p}}$ waarbij dan $\vec{p}$ de impuls in het instantane ruststelsel is die gedifferentieerd moet worden naar de eigen tijd van het deeltje (zie het College Relativistische Beginselen van Dr. G.J. Hooyman). Zoals in § II.B.1 reeds werd opgemerkt, moet het aldus gedefinieerde begrip kracht fysisch worden opgevat als een uiting van de wisselwerking van een aantal deeltjes waarbij gelet wordt op de beweging van slechts één deeltje en gesproken wordt over de kracht $\vec{F}$ die op dat ene deeltje werkt.

3. De derde wet van Newton:

actie = - reactie.

Dit houdt in dat als twee deeltjes met elkaar in wisselwerking verkeren, de kracht op het ene deeltje even groot is als en tegengesteld gericht aan de kracht op het andere deeltje:

$$\boxed{\vec{F}_{12} = - \vec{F}_{21}} \quad . \qquad (7)$$

Krachten treden dus steeds in paren op waarbij men moet bedenken dat actie en reactie op verschillende deeltjes werken.
Bij een op aarde vallend voorwerp oefent de aarde een evengrote kracht uit op dit voorwerp als het voorwerp op de aarde. Voor een waarnemer buiten de aarde valt niet alleen het voorwerp naar de aarde, maar ook de aarde naar het voorwerp. Ze bewegen naar elkaar toe.

4. De gravitatiewet. Twee deeltjes met massa m_1 en m_2 trekken elkaar wederkerig aan met een kracht die evenredig is met de beide massa's en omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand:

$$\boxed{\vec{F}_{12} = - \vec{F}_{21} = - G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{12}} \qquad (8)$$

De richting van de kracht is langs de verbindingslijn der deeltjes. De gravitatieconstante is $G = 6{,}67 \,.\, 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$. Deze wet is door Newton afgeleid voor de aantrekkingskracht tussen de zon en de planeten uit de empirische wetten van Kepler.
Lit.: AF 9; S 4; F 7; B 9.

Een uitvoerige behandeling van de gravitatiewet en de wetten van Kepler wordt gegeven in Hoofdstuk VI.

Het doel van de dynamica komt over het algemeen neer op het oplossen van de differentiaalvergelijking

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}}. \qquad (9)$$

II.B. 3. Impuls

De impuls (vroeger hoeveelheid beweging genoemd; Engels: momentum) gedefinieerd als $\vec{p} \equiv m\vec{v}$ diende in de vorige paragraaf ter formulering van het begrip kracht: $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$.
Integratie hiervan over de tijd geeft

$$\vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}.dt. \qquad (10)$$

De toename van de impuls is gelijk aan de tijdintegraal van de kracht. Doordat kracht een uitvloeisel is van een wisselwerking kunnen we dus stellen dat een wisselwerking impulsoverdracht veroorzaakt.
Voor een deeltje geldt dus dat de impuls constant is als er geen kracht op dat deeltje werkt. Voor een systeem van twee deeltjes die wel met elkaar onderling in wisselwerking verkeren maar verder geen wisselwerking met andere deeltjes hebben, geldt dat de totale impuls van die twee deeltjes constant is.

Deze wisselwerking tussen de twee deeltjes kan als volgt overzichtelijk worden geformuleerd:

$$\int_0^{\tau} \vec{F}_{12}\, dt = m_1(\vec{v}_1 - \vec{u}_1); \qquad (11)$$

$$\int_0^{\tau} \vec{F}_{21}\, dt = m_2(\vec{v}_2 - \vec{u}_2). \qquad (12)$$

Op het deeltje m_1 werkt de kracht $\vec{F}_{12}$, op het deeltje m_2 de kracht $\vec{F}_{21}$, de snelheid van m_1 voor en na de wisselwerking respectievelijk $\vec{u}_1$ en $\vec{v}_1$ en voor m_2 dito $\vec{u}_2$ en $\vec{v}_2$.

Daar op elk moment $\vec{F}_{12} = - \vec{F}_{21}$ is

$$m_1(\vec{v}_1 - \vec{u}_1) = - m_2(\vec{v}_2 - \vec{u}_2), \text{ dus } m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2. \qquad (13)$$

Dit is de wet van behoud van impuls, een zeer fundamentele en universeel geldige behoudswet in de fysica, die nauw samenhangt met de tweede en derde wet van Newton.

Soms wordt

$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}.dt$ impuls genoemd (Engels: impulse) en $m\vec{v}$ de hoeveelheid beweging (Engels: momentum). Wij maken dat onderscheid niet, echter wordt voor het geval dat $t_2 - t_1$ klein is de grootheid

$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}.dt$ of $\vec{F}.\Delta t$ wel met de term stoot aangeduid.

II.B. 4. Trage en zware massa

In de eerste wet van Newton wordt over rust en eenparig rechtlijnige beweging gelijkwaardig geoordeeld. Het volharden in een bestaande bewegingstoestand van een object dat vrij is, dat wil zeggen dat er geen krachten op werken, wordt aangeduid met de term traagheid of inertie; de eerste wet van Newton wordt daarom traagheidswet genoemd. Overigens moet de bewegingstoestand worden gerelateerd aan een waarnemer die op zijn beurt vrij is. Het referentiesysteem dat zo'n waarnemer gebruikt om bewegingen te beschrijven, wordt inertiaalstelsel genoemd: zie Hoofdstuk II.B.7.

De tweede wet van Newton voor een deeltje met constante massa $\vec{F} = m\vec{a}$, impliceert eigenlijk de eerste wet, immers als $\vec{F} = 0$ is $\vec{a} = 0$, dat wil zeggen de snelheid van het deeltje is constant.

De combinatie van eerste en tweede wet van Newton wordt ook vaak als traagheidswet aangeduid. Als men namelijk op verschillende massa's gelijke krachten laat werken, krijgt de grootste massa de kleinste versnelling. Massa is dus een maat voor de weerstand waarmee een object zich tegen bewegingsverandering verzet, hetgeen juist traagheid of inertie is. In dit verband wordt van trage massa m_t gesproken. Als op twee verschillende massa's m_1 en m_2 eenzelfde kracht gedurende dezelfde tijd werkt verhouden de snelheden $|\vec{v}_1|$ en $|\vec{v}_2|$ zich omgekeerd als de massa's. Immers

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt = m_1\vec{v}_1 = m_2\vec{v}_2. \qquad (14)$$

Door een eenheidsmassa m_e te definiëren (1 kgmassa = massa van $5{,}0188 \times 10^{25}$ atomen C^{12}; vroeger de massa van 10^{-3} m^3 water bij 4^o C) kan de waarde van een onbekende massa m_x worden bepaald door de snelheden van m_e en m_x te meten bij het experiment waarbij een samengedrukte veer zich vanuit rusttoestand ontspant tegen de beide massa's die wrijvingsloos in tegengestelde richting bewegen.

De aldus gemeten massa is de trage massa m_t.

Uit de valbeweging die samenhangt met de gravitatiewet volgt dat massa nog een tweede eigenschap heeft. Alle op één punt bij het oppervlak van de aarde vallende voorwerpen hebben dezelfde versnelling $\vec{g}$ en de kracht die dit veroorzaakt, is het gewicht $\vec{F}_g$ van het voorwerp. Deze kracht is volgens de gravitatiewet van Newton evenredig met de massa van het voorwerp: deze massa wordt de zware massa m_z genoemd.

De zwaartekracht F_{g1} die op een deeltje met zware massa m_{z1} werkt, is volgens de gravitatiewet

$G \frac{m_{z1}M}{R^2}$ als M de massa van de aarde is en R de afstand van het deeltje tot het centrum van de aarde. Daar volgens de tweede wet van Newton $F_{g1} = m_{t1}a_1$ is dus $G \frac{m_{z1}M}{R^2} = m_{t1}a_1$ (15)

waarbij m_{t1} de trage massa is en a_1 de versnelling. Analoog geldt voor een tweede deeltje

$$G \frac{m_{z2}M}{R^2} = m_{t2}a_2 \quad (16)$$

Empirisch is nu gebleken dat voor alle voorwerpen geldt:

$a_1 = a_2 = g$, de versnelling van de vrije val. (17)

Dan volgt uit bovenstaande formules

$$\frac{m_{t1}}{m_{z1}} = \frac{m_{t2}}{m_{z2}} \quad (18)$$

Door voor G nu de geschikte waarde te kiezen, namelijk $G = \frac{gR^2}{M}$ (19)

geldt universeel $m_t = m_z$ voor elke massa. (20)

De gelijkheid van trage en zware massa levert een methode om de massa van een voorwerp door bepaling van het gewicht te meten. Met de gelijkheid van zware massa en trage massa (het zogenaamde principe van de massa-equivalentie) hangt het algemene relativiteitsprincipe (Einstein 1915) samen. Dit houdt het volgende in:

Alle lichamen vallen vrij met dezelfde versnelling. Een waarnemer die alle lichamen met dezelfde versnelling ziet bewegen kan niet onderscheiden of zich in zijn laboratorium een homogeen gravitatieveld bevindt of dat zijn laboratorium zelf een versnelde beweging uitvoert. Het algemene relativiteitsprincipe eist nu dat de natuurwetten zodanig geformuleerd moeten worden dat het fysisch onmogelijk is een homogeen gravitatieveld van een versneld coördinatensysteem te onderscheiden.

Lit.: AF (9. 3, 8); B 14.

II.B. 5. Samenstellen en ontbinden van krachten

Empirisch is gebleken dat krachten zich bij optelling en vermenigvuldiging als normale vectoren gedragen. Voor de optelling geldt de gewone parallelogramregel.

Twee of meer krachten die op eenzelfde punt werken, blijken geen invloed op elkaars werking uit te oefenen. Dit is een voorbeeld van een belangrijk principe in de fysica, namelijk het superpositieprincipe. Dit houdt in dat meer oorzaken die gelijktijdig bestaan volkomen onafhankelijk van elkaar werken.

Het gevolg van de ene oorzaak wordt niet beïnvloed door de gelijktijdige aanwezigheid van de andere oorzaak. De gevolgen van alle oorzaken afzonderlijk kunnen zonder meer bij elkaar worden opgeteld of, anders uitgedrukt, worden gesuperponeerd. Uit het feit dat krachten echte vectoren zijn, volgt dat ze kunnen worden ontbonden, uiteraard met inachtneming van de parallelogramregel:

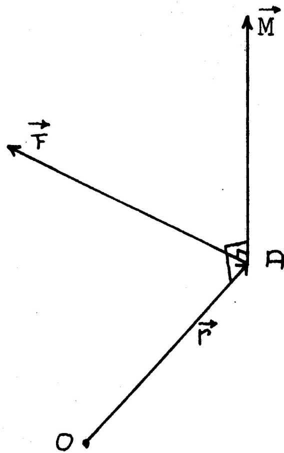
$$\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z; \qquad F_x = ma_x;\ F_y = ma_y;\ F_z = ma_z \tag{21}$$

zijn de componenten van de kracht uitgedrukt in de componenten van de versnelling. Voor krachten $\vec{F}_i$ die hetzelfde aangrijpingspunt hebben, is de resultante $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$ (22)

$$R_x = \sum_i F_{ix};\ R_y = \sum_i F_{iy};\ R_z = \sum_i F_{iz}; \qquad R = (R_x{}^2 + R_y{}^2 + R_z{}^2)^{\frac{1}{2}} \tag{23}$$

Krachten die op een uitgebreid lichaam werken, kunnen verschillende aangrijpingspunten hebben. Ook in die gevallen kunnen ze worden samengesteld tot één kracht plus eventueel één koppel, zie Hoofdstuk IV. Empirisch is gebleken dat de werking van een kracht niet verandert als zijn aangrijpingspunt langs zijn zog. werklijn wordt verplaatst en grootte en richting gelijk blijven:
krachten zijn lijnvluchtige of glijdende vectoren.

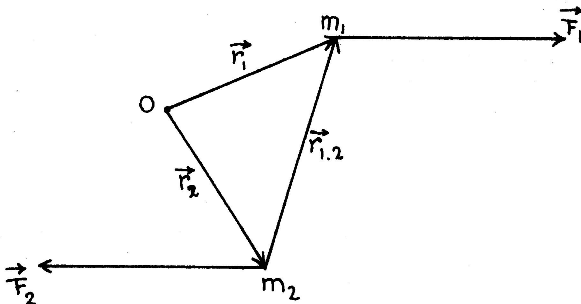
II.B. 6. Krachtmoment, koppelmoment en impulsmoment



Definitie krachtmoment $\boxed{\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}}$ (24)

$\vec{M} \perp \vec{r}$ en $\vec{M} \perp \vec{F}$; $\vec{M}$ hangt zowel qua grootte als qua richting af van de keuze van het punt O. Als in het punt A verschillende krachten $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$..... met een resultante $\vec{R}$ aangrijpen, is het moment van de resultante gelijk aan de som van de momenten van de afzonderlijke krachten:

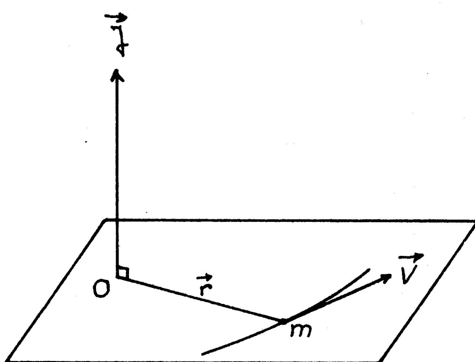
$$\vec{r}\times\vec{R} = \vec{r} \times \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}\times\vec{F}_i . \qquad (25)$$



Als op een systeem gelijke maar tegengesteld gerichte krachten werken, is de som der krachtmomenten gedefinieerd als het koppelmoment $\vec{K}$ (kortweg koppel genoemd).

$\vec{K} = \vec{r}_1\times \vec{F}_1 + \vec{r}_2\times \vec{F}_2$. Daar $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ is

$$\vec{K} = \vec{r}_1\times \vec{F}_1 - \vec{r}_2\times \vec{F}_1 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 = \vec{r}_{12} \times \vec{F}_1 \qquad (26)$$



In tegenstelling tot het krachtmoment is het koppelmoment onafhankelijk van de keuze van de oorsprong.

Het impulsmoment van een bewegend deeltje om een punt O is gedefinieerd als

$\boxed{\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p} = m.\vec{r} \times \vec{v}}$ (27)

Als de baan een cirkel is met O als middelpunt is $\vec{J} = mr^2\vec{\omega}$ (28

want $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

Als de baan niet cirkelvormig is, kan de snelheid $\vec{v}$ in een radiale en een azimutale component worden ontbonden:

$\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta$, (29)

dus $\vec{J} = m\vec{r} \times (v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta)$. (30)

Nu is $\vec{r} \times \vec{e}_r = 0$ en (zie pag. 19) (31)

$v_\theta = r\dot{\theta}$ (32)

dus $\vec{J} = mr^2\dot{\theta}\ \vec{e}_r \times \vec{e}_\theta = mr^2\vec{\omega}$; (33)

dezelfde uitdrukking als voor de cirkelbaan. De grootheid mr^2 is het traagheidsmoment I ten opzichte van O.

$\vec{J}$ kan natuurlijk ook in Cartesische componenten worden geschreven:

$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}, \text{ dus } \begin{aligned} J_x &= yp_z - zp_y \\ J_y &= zp_x - xp_z \\ J_z &= xp_y - yp_x \end{aligned} \qquad (34)$$

Impulsmomentstelling

In een inertiestelsel bestaat tussen $\vec{M}$ en $\vec{J}$ een eenvoudig verband:

$\dot{\vec{J}} = \dot{\vec{r}}\times\vec{p} + \vec{r}\times\dot{\vec{p}}$; $\dot{\vec{r}}$ en $\vec{p}$ hebben dezelfde richting ($\dot{\vec{r}} = \frac{\vec{p}}{m}$) dus $\dot{\vec{r}}\times\vec{p} = 0$

zodat $\dot{\vec{J}} = \vec{r}\times\dot{\vec{p}}$ $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$ dus $\boxed{\dot{\vec{J}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}}$ (35)

De tijdafgeleide van het impulsmoment is gelijk aan het krachtmoment. In integraalformulering

$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}dt = \vec{J}_2 - \vec{J}_1}$: de tijdintegraal van het krachtmoment (36)

is gelijk aan de toename van het impulsmoment.

Een belangrijk geval is dat van een centraal krachtveld. Daar $\vec{r}$ en $\vec{F}$ dezelfde of tegengestelde richting hebben, is $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} = 0$ (37)

Dan is volgens (20) ook $\dot{\vec{J}} = 0$ d.w.z. $\vec{J}$ is een constante.

Deze formulering is equivalent met de tweede wet van Kepler (de perkenwet, zie Hoofdstuk VI).

II.B. 7. Inertiaalstelsels en schijnkrachten

Plaats en beweging worden beschreven ten opzichte van een coördinatenstelsel. In hoeverre deze beschrijving afhangt van de keuze van het coordinatenstelsel is behandeld in Hoofdstuk II.A.2. Daar bleek dat de versnelling invariant is voor eenparige translatie van het coördinatenstelsel. Dit betekent dat de versnelling ten opzichte van een bepaald stelsel gelijk is aan de versnelling ten opzichte van elk stelsel dat ten opzichte van dit stelsel eenparig rechtlijnig beweegt zonder rotatie, of in rust is terwijl de versnelling ten opzichte van alle andere stelsels een andere waarde heeft. De vraag is nu hoe het met de geldigheid van de wetten van Newton gesteld is. De wet $\vec{F} = m\vec{a}$ geldt niet zonder meer in alle referentiestelsels daar $\vec{F}$ gemeten met bijvoorbeeld een veer niet, maar $\vec{a}$ wél van het gekozen stelsel kan afhangen.
Een stelsel waarin deze wet wel zonder meer geldt, wordt een inertiaalstelsel (I.S.) genoemd. Een met de vaste sterren verbonden coördinatenstelsel is met voldoende nauwkeurigheid als een I.S. te beschouwen. Een stelsel dat vast aan de aarde verbonden is, fungeert in vele gevallen als een I.S. maar het is niet exact. Zo is de centripetaalversnelling van elk punt van de evenaar $a_A = \omega_a^2 R_a = 3{,}4$ cm s^{-2}.
Dit is een vrij kleine fractie van de versnelling van de vrije val die van de orde van grootte van 1000 cm s^{-2} is. De centripetaalversnelling van de aarde in zijn baan om de zon is $a_Z = \omega_Z{}^2 R_Z = 0{,}6$ cm s^{-2}.
De centripetaalversnelling van de zon in zijn baan om het centrum van de melkweg is $a_S = \omega_S{}^2 R_S = 3.10^{-8}$ cm s^{-2}.

De basisveronderstellingen van de klassieke mechanica zijn:

1. De ruimte is euclidisch: de som van de hoeken van een driehoek is 180°; evenwijdige lijnen snijden elkaar in het oneindige; de normale vectorrekening is geldig.
2. De ruimte is isotroop. Dit betekent dat fysische eigenschappen in alle richtingen gelijk zijn.
   Massa hangt niet af van de richting van de versnelling.
3. De wetten van Newton zijn geldig in inertiaalsystemen.
4. De gravitatiewet van Newton geldt universeel.

De juistheid van deze veronderstellingen is door de ervaring bevestigd.

Uit de invariantie van de versnelling voor eenparige translatie volgt dat alle stelsels die ten opzichte van een I.S. eenparig rechtlijnig bewegen op hun beurt ook equivalente inertiaalstelsels zijn waarin de wet $\vec{F} = m.\vec{a}$ onveranderlijk geldig is. Dit is het relativiteitsbeginsel van Galilei in de klassieke mechanica, dat dus hierop neerkomt, dat alle wetten van de dynamica dezelfde moeten zijn voor alle inertiaalwaarnemers die met constante snelheid ten opzichte van elkaar bewegen.

In de speciale relativiteitstheorie (Einstein) is dit beginsel uitgebreid tot alle natuurwetten. Omdat de lichtsnelheid onafhankelijk is van de bewegingstoestand van de waarnemers betekent dit dat alle waarnemers hun waarnemingen Lorentz-invariant moeten formuleren en deze formulering is voor alle inertiaalwaarnemers gelijk.

Het heeft geen zin onderscheid te maken tussen "absolute" rust en eenparige beweging. Bij de beschrijving van de beweging in een coordinatenstelsel dat geen I.S. is, schijnen er krachten te werken die niet in verband kunnen worden gebracht met andere massa's, zog. <u>schijnkrachten</u> of <u>pseudokrachten</u> (Engels: fictitious forces, pseudo forces).

In een stelsel O' dat ten opzichte van een I.S. O een constante versnelling $\vec{a}_0$ heeft, is de versnelling van een deeltje dat in O gemeten de versnelling $\vec{a}$ heeft, gelijk aan $\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_0$ (verg. (54)) Hoofdstuk II.A.2. p. 20). Dan is dus $m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{a}_0 = \vec{F} - m\vec{a}_0$.

De kracht $\boxed{\vec{F}_s = -m\vec{a}_0}$ is in dit geval de schijnkracht. (38)

$\boxed{\vec{F} + \vec{F}_s = m\vec{a}'}$ (39)

We kunnen formeel de 2e wet van Newton in het bewegende (niet-inertie) stelsel toepassen door òf de schijnkracht toe te voegen aan $\vec{F}$ òf de

versnelling te transformeren:

$\vec{F} = m(\vec{a}' + \vec{a}_0)$ Voorbeeld: een versneld bewegende lift. (40)

In een stelsel O' dat ten opzichte van een I.S. O een eenparige rotatie met hoeksnelheid $\vec{\omega}$ uitvoert, is de versnelling volgens formule (64) van Hoofdstuk II.A.2. p. 21

$\vec{a}' = \vec{a} - 2\vec{\omega}\times\vec{V}' - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$. Vermenigvuldiging met m geeft

$m\vec{a}' = m\vec{a} - 2m\vec{\omega}\times\vec{V}' - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$

Hier treden twee schijnkrachten op: de Coriolis kracht $\vec{F}_{Cor}$

$$\boxed{\vec{F}_{Cor} = -2m\vec{\omega}\times\vec{V}'} \qquad (41)$$

en de centrifugaalkracht $\vec{F}_{cf}$ $\boxed{\vec{F}_{cf} = -\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})m}$ (42)

Dus is $\boxed{\vec{F} + \vec{F}_{Cor} + \vec{F}_{cf} = m\vec{a}'}$ (43)

Hier zijn de beide schijnkrachten toegevoegd aan de werkelijke kracht.
Eveneens kan geschreven worden

$$\vec{F} = m\{\vec{a}' + 2\vec{\omega}\times\vec{V}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})\}. \qquad (44)$$

Dit is de tweede wet van Newton met getransformeerde versnelling.

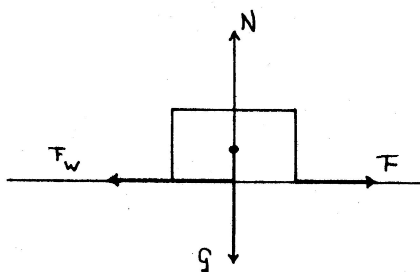
Een belangrijk voorbeeld van de Coriolis kracht is het effect van de rotatie van de aarde op de windrichting: op het noordelijk halfrond leidt dit tot de afbuiging van de wind naar rechts (wet van Buys Ballot) en een anticyclonale luchtbeweging om een gebied van lage druk. Voor een uitvoerige beschouwing van bewegingen ten opzichte van de draaiende aarde zie Lit.: S 7.3, 7.4; AF 2.5.

In de molecuulfysica kan met behulp van de Coriolis kracht de koppeling tussen rotatie en vibratie van moleculen worden verklaard.

II.B. 8. Wrijvingskrachten Lit.: S 2; AF 3.

Veel bewegende objecten ondervinden wrijvingskrachten van hun omgeving (wiel dat draait om as, regendruppel die in lucht valt). Door wrijving wordt energie gedissipeerd i.c. mechanische energie omgezet in warmte.

Als we aan een voorwerp dat in rust op een tafel ligt met een zeer kleine kracht F trekken dan komt het voorwerp niet in beweging.



Bij een bepaalde waarde $F = F_0$ begint het voorwerp te bewegen. Voor $F \leq F_0$ is de wrijvingskracht $F_w = F$.
De kracht die de tafel op het voorwerp in de richting loodrecht op het gemeenschappelijk aanrakingsoppervlak uitoefent, is de normale kracht N.

Glijdt het voorwerp over de tafel dan is $F_w = fN$ (45)

f is de wrijvingscoëfficiënt.

Er bestaat nog een verschil tussen de waarden van de wrijvingscoëfficiënt op het ogenblik dat het voorwerp in beweging komt (statische wrijvingscoëfficiënt f_0) en die als het voorwerp in beweging is (kinetische wrijvingscoëfficiënt f) $f < f_0$.

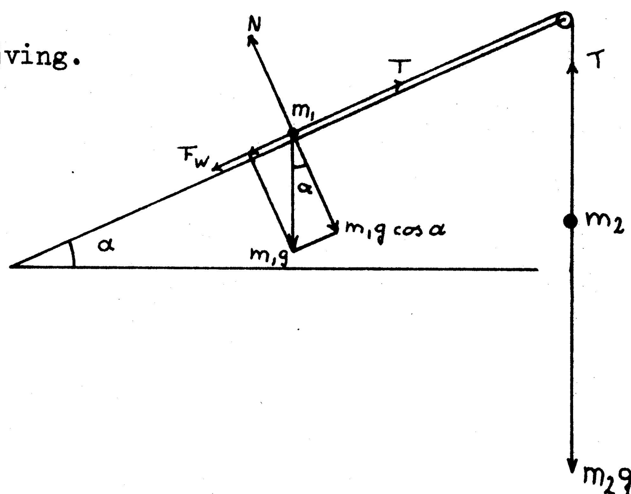
De wet $F_w = fN$ geldt slechts bij benadering voor niet te grote snelheden.

Voorbeeld 1: hellend vlak met wrijving.

Stel het voorwerp m_2 gaat naar beneden: dit hangt af van m_1, m_2, f en α.

De wrijvingskracht $F_w = fN =$
$= fm_1 g\cos\alpha$

Als de spanning in het koord



T is, gelden de bewegingsvergelijkingen:

$T - m_1 g\sin\alpha - fm_1 g\cos\alpha = m_1 a$; $m_2 g - T = m_2 a$ (46-47)

de versnelling van het systeem is a.

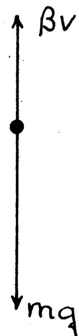
Dan is: $$a = \frac{(m_2 - m_1\sin\alpha - m_1 f\cos\alpha)g}{m_1 + m_2}$$ (48)

Voorbeeld 2: beweging van objecten in een visceus medium.

Voor relatief kleine snelheden is de wrijvingskracht evenredig met de snelheid ten opzichte van het medium en daaraan tegengesteld gericht:

$\vec{F}_w = -\beta\vec{v}$ (voor grote snelheden is de wrijvingskracht (49)
evenredig met het kwadraat van de snelheid)

Uitwerking van het geval van een verticaal vallend voorwerp.



Stel de snelheid op tijdstip t = 0 gelijk 0. Reken de snelheid naar beneden positief. De bewegingsvergelijking is dan $m\dot{v} = mg - \beta v$ (50)

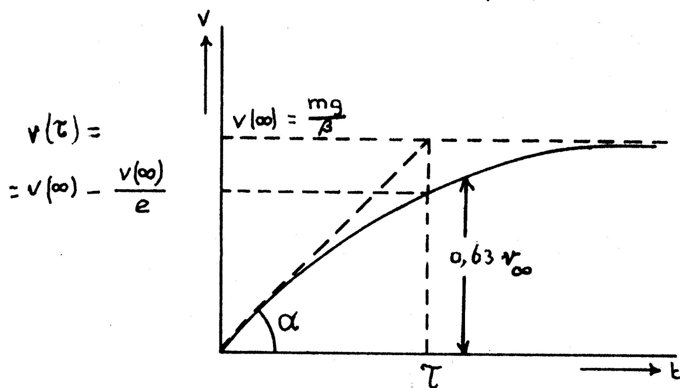
$\int \frac{dv}{g - \frac{\beta}{m} v} = \int dt$. Met de randvoorwaarde $v(0) = 0$ wordt de oplossing

$$v(t) = \frac{mg}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}\right) \qquad (51)$$

$\tau = \frac{m}{\beta}$ is de relaxatietijd (52)

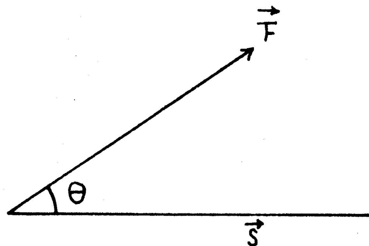
waarbij geldt

$$\frac{v(\infty) - v(\tau)}{v(\infty)} = \frac{1}{e}. \qquad (53)$$

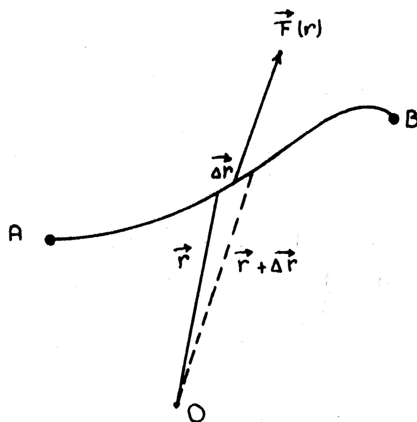


Aan het begin is $v(0) = 0$ en is de versnelling $\dot{v} = tg\alpha = g$, de versnelling van de vrije val.

II.B. 9. Arbeid en energie Lit.: S 3; AF 4; B 5; F 3, 4, 13.



De door een constante kracht $\vec{F}$ verrichte arbeid bij verplaatsing over een rechte weg $\vec{s}$ is $\boxed{W = Fs\cos\theta = \vec{F}.\vec{s}}$ (1)
het inprodukt van de vectoren $\vec{F}$ en $\vec{s}$.
De eenheid in het Giorgi-stelsel is de Newtonmeter (Nm) of Joule (J).
In het cgs-stelsel: dyne cm ≡ erg.



Algemeen geldt: $W = \int_A^B \vec{F}(\vec{s}).d\vec{s} =$

$$= \int_A^B \vec{F}(\vec{r}).d\vec{r} \qquad (2)$$

Dit is een lijnintegraal waarbij $d\vec{s}$ een infinitesimaal lijnstuk is
$d\vec{s} = d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz$, waarvan de componenten in Cartesische coördinaten zijn dx, dy en dz.

$$W = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}).d\vec{r} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}).\dot{\vec{r}}dt = \int_A^B (F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z})dt \qquad (3)$$

De grootheid $\boxed{\vec{F}(\vec{r}).\dot{\vec{r}} = P}$ is de per seconde verrichte arbeid: (4)
<u>vermogen</u> (Engels: power); de eenheid is 1 Nm.s^{-1} ≡ 1 J.s^{-1} ≡ 1 Watt.

Als de kracht en de weg der verplaatsing loodrecht op elkaar staan is de verrichte arbeid nul. Voorbeelden van krachten die geen arbeid verrichten zijn: de zwaartekracht bij een horizontale verplaatsing; de centripetale kracht bij een cirkelbeweging; de Lorentz-kracht die werkt op een bewegend geladen deeltje in een magneetveld.

Kinetische en potentiële energie

Van een deeltje m dat langs een rechte lijn (x-richting) beweegt onder invloed van een langs deze lijn gerichte kracht F(x) is de positie op tijd t_1 is x_1, op tijd t_2 is dat x_2, snelheid resp. v_1 en v_2.
2e Wet van Newton: $F(x) = m\ddot{x}$.

Vermenigvuldiging van beide leden met dx en integratie over x geeft

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} m\ddot{x}dx = \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{x}\,\dot{x}dt = \int_{t_1}^{t_2} m\,v\,\dot{v}\,dt = \int_{v_1}^{v_2} m\,v\,dv =$$

$$= \tfrac{1}{2}\,mv_2^{\,2} - \tfrac{1}{2}\,mv_1^{\,2} \tag{5}$$

Vermenigvuldiging van beide leden met $\dot{x}$ en integratie over de tijd geeft: $\dot{x}F(x) = m\dot{x}\ddot{x}$ (alternatieve formulering)

$m\dot{x}\ddot{x} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}\,m\dot{x}^2)$, dus $(\frac{1}{2}m\dot{x}^2)_{t_2} - (\frac{1}{2}m\dot{x}^2)_{t_1} = \int_{t_1}^{t_2} F(x)\dot{x}dt$

$\int_{t_1}^{t_2} F(x)\dot{x}dt = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$. Resultaat $\frac{1}{2}mv_2^{\,2} - \frac{1}{2}mv_1^{\,2} = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx$

Definitie van kinetische energie E_k (energie van beweging): $\boxed{E_k = \frac{1}{2}mv^2}$ (6)

$$\boxed{E_{k_2} - E_{k_1} = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx} \tag{7}$$

De op het deeltje uitgeoefende arbeid is gelijk aan de toename van de kinetische energie.

De potentiële energie E_p van de puntmassa in het punt x is de arbeid die het veld verricht als de puntmassa van het punt x naar een vast gekozen referentiepunt x_0 gebracht wordt:

$$\boxed{E_p = \int_{x}^{x_0} F(x)dx} \tag{8}$$

$$F(x) = -\frac{dE_p}{dx} \tag{9}$$

Nu geldt:

$$E_{k_2} - E_{k_1} = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx = \int_{x_1}^{x_0} F(x)dx + \int_{x_0}^{x_2} F(x)dx = E_{p_1} - E_{p_2}$$

Dus is

$$\boxed{E_{k_1} + E_{p_1} = E_{k_2} + E_{p_2}} \tag{10}$$

De som van kinetische en potentiële energie is constant.

Voorbeeld: vallend voorwerp: $E_p = mgh$, $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

$mgh + \frac{1}{2}mv^2 = C$ (constant), v neemt toe als h afneemt. De door de zwaartekracht op het voorwerp verrichte arbeid, dat is een afname van de potentiële energie, wordt bij vallen omgezet in kinetische

energie. Dit is de wet van behoud van mechanische energie die geldig is voor zogenaamde conservatieve systemen, dat zijn systemen waarin bij veranderingen hetzij kinetische energie in potentiële energie wordt omgezet of omgekeerd. Als mechanische energie in een andere vorm van energie wordt omgezet, spreekt men van energie dissipatie. Dit treedt bijvoorbeeld op bij glijdende- of visceuse wrijving waarbij kinetische energie in warmte wordt omgezet en bij botsingen tussen atomen of moleculen die in een geëxciteerde toestand worden gebracht. Andere voorbeelden van dissiperende krachten zijn die waarbij elektrische stromen optreden zoals bij een bewegend anker van een dynamo.

In de fysica is de algemene wet van behoud van energie geldig. In de relativiteitstheorie is de totale energie inclusief m_0c^2 constant. Een en ander hangt samen met de eerste hoofdwet van de thermodynamica waarbij de onmogelijkheid van een perpetuum mobile (p.m.) van de eerste soort gesteld wordt. De uitdrukking p.m. is eigenlijk onjuist want de eerste wet van Newton stelt principieel wel de mogelijkheid van een p.m. In de thermodynamica echter wordt met p.m. bedoeld een altijd voortbewegend lichaam dat tevens arbeid verricht.

E_p kan in tegenstelling tot E_k ook wel negatief zijn afhankelijk van de keuze van het referentiepunt x_0. Daar het uitsluitend om verschillen in potentiële energie gaat, is de keuze van x_0 irrelevant. Door verdere integratie van $E_k + E_p$ = constant, wordt een uitdrukking voor de beweging x(t) gevonden:

$$\tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x) = C \; ; \qquad \dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\{C - E_p(x)\}} \qquad (11\text{-}12)$$

$$\frac{dt}{dx} = \pm\{\frac{2}{m}(C - E_p(x)\}^{-\frac{1}{2}} \; ; \qquad \int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{dx}\,dx = \pm\int_{x_1}^{x_2}\{\frac{2}{m}(C - E_p(x)\}^{-\frac{1}{2}}dx \qquad (13\text{-}14)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{dt}{dx}\,dx = \int_{t_1}^{t_2} dt = t_2 - t_1 = \pm\int_{x_1}^{x_2}\{\frac{2}{m}(C - E_p(x)\}^{-\frac{1}{2}}dx \qquad (15)$$

Als $t(x_1) = t_1$ gegeven is en $E_p(x)$ en C bekend zijn, is de bewegingsfunctie x(t) te berekenen. Er is tweemaal geïntegreerd en er zijn twee constantes: C en $x(t_1) = x_1$. Het optreden van het $\pm$ teken hangt

hiermee samen dat door $E_p(x_1)$ en C wel het kwadraat van de snelheid v op tijd t_1 bepaald is, maar niet het teken. Dit komt door de principiële omkeerbaarheid van die mechanische processen waarbij geen mechanische energie wordt gedissipeerd als warmte. Het betekent fysisch dat als de snelheid van een deeltje van richting wordt omgekeerd de baan precies in omgekeerde richting wordt doorlopen.
Deze omkeerbaarheid berust op het feit dat in de 2e wet van Newton $F = m\ddot{x}$ de tijd kwadratisch voorkomt. Vervanging van t door $t' = -t$ geeft dezelfde vergelijking.

De formulering met vectoren is analoog. De kracht $\vec{F}(\vec{r})$ hangt alleen van $\vec{r}$ af en niet van t en $\dot{\vec{r}}$.
Integratie van $\vec{F} = m\dot{\vec{v}}$ over de afgelegde weg geeft:

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}.d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m\dot{\vec{v}}.d\vec{r} = \int_{\vec{t}_1}^{\vec{t}_2} m\dot{\vec{v}} \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} m\vec{v}\,\dot{\vec{v}}\, dt = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} m\vec{v}\, d\vec{v} =$$

$$= \tfrac{1}{2} mv_2^{\,2} - \tfrac{1}{2} mv_1^{\,2}, \qquad (16)$$

waarbij $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$; $\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$; $\vec{v}_1 = \vec{v}(t_1)$; $\vec{v}_2 = \vec{v}(t_2)$.

Definitie van potentiële energie $E_p(\vec{r}_1) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_0} \vec{F}.d\vec{r}$ (17)

dat is de arbeid die $\vec{F}$ moet verrichten om het massapunt van de plaats $\vec{r}_1$ naar het referentiepunt $\vec{r}_0$ te brengen.

$$E_{k_2} - E_{k_1} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_0} \vec{F}.d\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F}.d\vec{r} = E_{p_1} - E_{p_2}, \quad \text{dus}$$

$$\boxed{(E_k + E_p)_1 = (E_k + E_p)_2 = E} \quad \text{is constant:} \qquad (18)$$

de <u>wet van behoud van mechanische energie</u>.
Potentiële energie is een zodanige functie van de coördinaten dat het verschil in functiewaarden tussen begin- en eindpunt gelijk is aan de arbeid die door de veldkracht is verricht onafhankelijk van de gevolgde weg.

Algemeen kan worden gesteld dat de potentiële energie uitsluitend van de plaats afhangt en niet van de snelheid, terwijl de kinetische energie juist niet van de plaats afhangt maar alleen van de snelheid v of, wat meestal op hetzelfde neerkomt, van de impuls p.

Dus is $E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$ daar $p = mv$. (19)

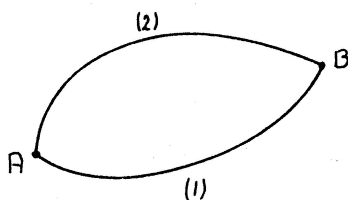
Het verband tussen E en p is van groot belang met name in de relativistische mechanica (hier geldt: $E^2 = c^2(p^2 + m_0{}^2c^2)$) (20) en in de quantummechanica waar E en p vervangen worden door operatoren.

De energiebehoudswet is zeer nuttig bij die problemen waarbij de krachten niet in detail bekend zijn of moeilijk te berekenen; uiteraard moeten de krachten wel conservatief zijn om de energiebehoudswet zonder meer te kunnen toepassen.

De energiebehoudswet is een eerste integraal van de dynamische bewegingsvergelijking. De behoudswet is dan ook een differentiaalvergelijking van de eerste orde terwijl de bewegingsvergelijking een tweede orde differentiaalvergelijking is. Een ander voordeel van het gebruik van de energiebehoudswet ten opzichte van de bewegingsvergelijking is dat in de behoudswet scalaire grootheden voorkomen terwijl de bewegingsvergelijking uit vectoriële termen bestaat.

Deze energiebehoudswet is alleen geldig voor krachtvelden waar $E_p(\vec{r})$ eenduidig bepaald is door $\vec{r}$ en $\vec{r}_0$ en wel onafhankelijk van de weg waarover de lijnintegraal genomen wordt.

De integraal $\int_A^B \vec{F}(\vec{r}).d\vec{r}$ is dan alleen afhankelijk van begin- en eindpunt A en B en niet afhankelijk van de gevolgde weg, dus:



$$\underset{(1)}{\int_A^B \vec{F}.d\vec{r}} = \underset{(2)}{\int_A^B \vec{F}.d\vec{r}} \qquad (21)$$

Dat betekent dan dat in een <u>conservatief krachtveld</u> elke kring (lijn) integraal van de kracht 0 is: $\boxed{\oint \vec{F}.d\vec{r} = 0}$ (22)

Het veld heet conservatief omdat de mechanische energie behouden blijft.

In een conservatief veld bestaat een potentiaalfunctie voor de kracht. Als namelijk de arbeid door de veldkracht verricht alleen afhankelijk is van begin- en eindpunt van de afgelegde weg geldt:

$\int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = E_{p,A} - E_{p,B}$ (23); $\vec{F}.d\vec{r} = F ds\cos\theta$ als θ de hoek is tussen de (23)

kracht en de infinitesimale verplaatsing. $F\cos\theta = -\frac{dE_p}{ds}$ (24)

is de component van de kracht in de richting van de verplaatsing.

$-\frac{dE_p}{ds}$ is de richtingsafgeleide van E_p. We schrijven nu

$$\vec{F} = -\text{ grad } E_p. \tag{25}$$

De kracht is de negatieve gradiënt van E_p; grad E_p is een vector, in Cartesische coördinaten te schrijven als

$$\text{grad } E_p = \vec{i}\,\frac{\partial E_p}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial E_p}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial E_p}{\partial z} \tag{26}$$

Dus is $F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$; $F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$; $F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$.

Het criterium voor een conservatief krachtveld $\vec{F}$ is dat aan de volgende betrekkingen wordt voldaan (in Cartesische coördinaten):

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} = 0 \tag{27}$$

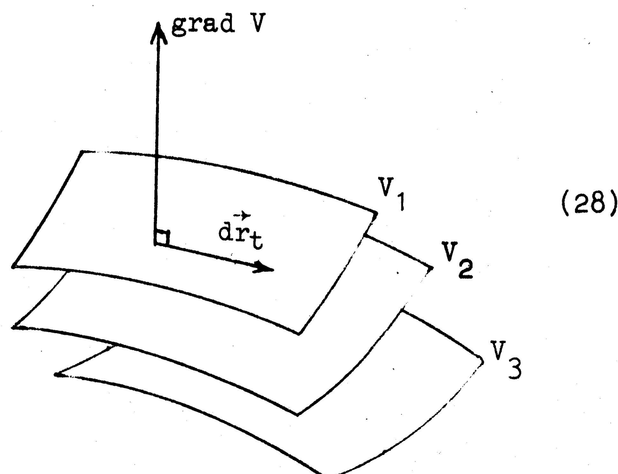
Dit is mathematisch equivalent met $\oint \vec{F}.d\vec{r} = 0$. Lit.: AF 4.7; S 3.6.

Intermezzo: <u>Gradiënt</u>.

Stel V is een scalaire fysische grootheid afhankelijk van de plaats, bijvoorbeeld potentiaal of temperatuur. De meetkundige plaats van punten die dezelfde waarde van V hebben, wordt niveauvlak (of equipotentiaalvlak) genoemd. Hiernaast zijn stukjes van drie zulke vlakken getekend voor de waarden V_1, V_2 en V_3.

Bij verplaatsing over een kleine afstand $d\vec{r}$, verandert V met

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz \tag{28}$$



Dit kan nu geschreven worden als het inwendige produkt van de vectoren $d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz$ en $\vec{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial V}{\partial z}$

Deze laatste wordt gradiënt genoemd, dus

$$\text{grad } V = \vec{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial V}{\partial z} \quad (29)$$

$$dV = d\vec{r}.\text{grad } V \quad (30)$$

De richting van grad V wordt gevonden met behulp van een verplaatsingsvector $d\vec{r}_t$ in een niveauvlak.

Dan moet $dV = d\vec{r}_t.\text{grad } V$ gelijk 0 zijn:grad V staat loodrecht op het niveauvlak. Voor een willekeurige richting geldt

$dV = |d\vec{r}|.|\text{grad } V|\cos(d\vec{r},\text{grad } V)$ dus de richting van de gradiënt is die waarin de grootheid V het sterkst toeneemt. De gradiënt is een operator die aan een scalaire puntfunctie een vectorveld toevoegt.

Twee belangrijke voorbeelden van conservatieve krachtvelden zijn:

1. Het homogene krachtveld $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}_0$ (31)

2. Het centrale krachtveld $\vec{F}(\vec{r}) = \frac{\vec{r} - \vec{r}_c}{|\vec{r} - \vec{r}_c|} \cdot f(|\vec{r} - \vec{r}_c|)$ (32)

   $\vec{r}_c$ geeft de plaats van het centrum aan.

Door een lijnintegraal van deze krachten over een gesloten doch overigens willekeurige weg uit te rekenen, is aan te tonen dat deze krachten conservatief zijn.

De superpositie van twee of meer conservatieve velden geeft weer een conservatief veld; de totale potentiële energie is gelijk aan de som van de potentiële energieën van de samenstellende velden.

In het algemeen zijn velden die van de tijd afhankelijk zijn niet conservatief.

Als er een wrijvingskracht optreedt die evenredig is met de snelheid geldt $m\vec{a} = \vec{F} - \beta\vec{v}$ (33)

Vermenigvuldiging met $\vec{v}$ en integratie over de tijd geeft dan:

$$E_{k_2} - E_{k_1} = \int_1^2 \vec{F}.d\vec{r} - \int_1^2 \beta v^2 dt \quad (34)$$

De som van de kinetische en potentiële energie blijft nu niet constant maar een gedeelte wordt in de vorm van warmte gedissipeerd. Het gedissipeerd vermogen βv^2 is de energie die per seconde in warmte wordt omgezet.

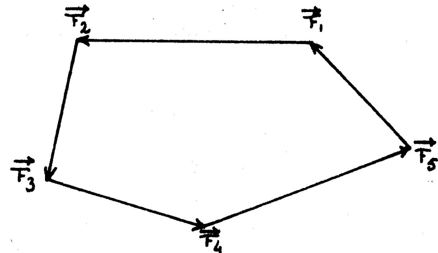
II.B. 10. Statica (voor één deeltje) ; evenwicht en rust

Daar voor een deeltje geldt $\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$ is de noodzakelijke voorwaarde voor een statisch systeem

I. $\boxed{\sum_i \vec{F}_i = 0}$ of $\sum_i F_{i_x} = \sum_i F_{i_y} = \sum_i F_{i_z} = 0$ 1e formulering (35)

De evenwichtsvoorwaarde houdt in dat de krachtenveelhoek gesloten is.

Een equivalente formulering van de evenwichtsvoorwaarde kan worden ontleend aan een zog. virtuele verplaatsing. Dit is een kleine verplaatsing $\delta\vec{r}$ vanuit de evenwichtstoestand die zo klein is dat de krachten op het massapunt uitgeoefend daarbij niet veranderen.



II. De virtuele arbeid door de krachten verricht is $\sum_i \vec{F}_i.\delta\vec{r}$ en de evenwichtsvoorwaarde luidt $\boxed{\sum_i \vec{F}_i.\delta\vec{r} = 0}$ 2e formulering (36)

Daar dit geldt voor elke willekeurige virtuele $\delta\vec{r}$ is $\sum_i \vec{F}_i = 0$

Als alle krachten $\vec{F}_i$ conservatief zijn, d.w.z. afleidbaar uit een potentiële energie E_{p_i} geldt voor de gesommeerde potentiële energie $E_p = \sum_i E_{p_i}$

III. Een alternatieve evenwichtsformulering is nu $\boxed{\delta E_p = 0}$ (37)

Dit volgt uit $\delta E_{p_i} = \text{grad } E_{p_i}.\delta\vec{r} = -\vec{F}_i.d\vec{r}$ 3e formulering

De functie E_{p_i} heeft in het evenwichtspunt een extreme waarde of buigpunt en voor dit evenwichtspunt geldt dan in Cartesische coördinaten:

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = \frac{\partial E_p}{\partial y} = \frac{\partial E_p}{\partial z} = 0 \qquad (38)$$

In het eendimensionale geval geldt voor conservatieve krachten:

a) als $\frac{d^2E_p}{dx^2} > 0$: stabiel evenwicht: E_p is minimaal (39)

b) als $\frac{d^2E_p}{dx^2} = 0$: indifferent evenwicht (40)

c) als $\frac{d^2E_p}{dx^2} < 0$: labiel evenwicht: E_p is maximaal (41)

Voorbeeld: deeltje met massa m dat hangt aan verticale veer en dat de zwaartekracht ondervindt.

Uitrekking x; zwaartekracht $-mg$; veerkracht $+\alpha x$.
Evenwichtsvoorwaarde $\sum_i \vec{F}_i = 0$; $-mg + \alpha x = 0$; $x = \frac{mg}{\alpha}$

$E_{p_{veer}} = \frac{1}{2}\alpha x^2$ $E_{p_{gew.}} = -mgx$ $E_p = \frac{1}{2}\alpha x^2 - mgx$

$\delta E_p = 0$, dat wil zeggen $dE_p/dx = 0$, dus $\alpha x - mg = 0$; $x = \frac{mg}{\alpha}$

$\frac{d^2E_p}{dx^2}$ is positief dus het is een stabiel evenwicht.

Bij een stabiel evenwicht treedt bij uitwijking uit de evenwichtsstand een terugdrijvende kracht op, bij een labiel evenwicht een kracht die een nog grotere uitwijking uit de evenwichtsstand veroorzaakt (een afdrijvende kracht). Bij een indifferent evenwicht is de kracht als gevolg van een uitwijking in eerste orde nul.

Rust en evenwicht.

Een deeltje is in rust ten opzichte van een waarnemer als de relatieve snelheid deeltje-waarnemer nul is. Een deeltje is in evenwicht ten opzichte van een waarnemer als de relatieve versnelling deeltje-waarnemer nul is. In dit laatste geval is $\vec{F} = 0$. Een deeltje kan in rust zijn, maar niet in evenwicht. Een voorbeeld hiervan is een verticaal omhoog gegooid voorwerp in het hoogste punt ten opzichte van de aarde: de snelheid is 0 maar de zwaartekracht werkt en de versnelling is $\vec{g}$ (naar beneden gericht). Het omgekeerde kan ook voorkomen, namelijk dat een deeltje in evenwicht is maar niet in rust.
Een voorbeeld is het vrije deeltje waarop geen krachten werken maar dat rechtlijnig eenparig beweegt ten opzichte van een inertiestelsel. Daar meestal objecten die in rust zijn tevens in evenwicht zijn, worden deze begrippen vaak ten onrechte synoniem beschouwd.

II.B. 11. Harmonische oscillator   Lit.: S 5; AF 8; B 7; F 21, 23.

1. De ongedempte vrije harmonische oscillator.

1.1 Het enkelvoudige geval.

Een oscillator is harmonisch als de terugdrijvende kracht F op de puntmassa naar een vast punt gericht is en evenredig is met de afstand x tot dit vaste punt: $F = -kx$; k is de veerconstante of richtkracht.

Voorbeelden: massa aan een veer, slinger.

Wet van Newton: $F = m\ddot{x}$; dus $\boxed{m\ddot{x} = -kx}$ (1)

Dit is de 2e orde differentiaalvergelijking van de ongedempte enkelvoudige harmonische beweging. De oplossing van deze vergelijking wordt verkregen door met $\dot{x}$ te vermenigvuldigen en te integreren over de tijd.

$m\ddot{x}\dot{x} + kx\dot{x} = 0$. Dit is te schrijven als $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m\dot{x}^2) + \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}kx^2) = 0$.

Integratie geeft: $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = C$. (2)

Dit is de wet van behoud van mechanische energie die we ook direct hadden kunnen opschrijven daar de (ongedempte) harmonische oscillator een conservatief systeem is. Potentiële energie (elastische potentiële energie) en kinetische energie gaan beurtelings in elkaar over. Hun som is op elk tijdstip constant.

De uitwijking uit de evenwichtsstand is het grootst (de zogenaamde amplitude waarde) als de snelheid $\dot{x} = 0$ is. Dan is dus $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 = C$. De vergelijking voor de oscillator is nu dus

$m\dot{x}^2 = k(A^2 - x^2)$. (3)

Integratie geeft $\int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \pm \int \sqrt{\frac{k}{m}}\, dt$ of $\arcsin \frac{x}{A} = \sqrt{\frac{k}{m}}\, t + \alpha$.

Geven we $\sqrt{\frac{k}{m}}$ aan met ω_0 dan is de oplossing

$x = A\cos(\omega_0 t + \alpha)$ met integratieconstanten A (amplitude) en α. (4)

We kunnen ook als oplossing schrijven

$x = P\sin\omega_0 t + Q\cos\omega_0 t$ (5)

waarbij de integratieconstanten dan P en Q zijn.

De hoeksnelheid of cirkelfrequentie is $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ (6)

en wordt de <u>eigenfrequentie</u> van de ongedempte harmonische oscillator genoemd. De fase is $(\omega_0 t + \alpha)$. De periode van de oscillatie is dan $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. (7)

De projectie van een eenparige cirkelbeweging op een middellijn is een enkelvoudige harmonische beweging.

De kinetische energie is $E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0{}^2A^2\cos^2(\omega_0 t + \alpha) =$

$= \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \alpha)$.

De potentiële energie is $E_p = \int_0^x ksds = \frac{1}{2}kx^2 =$

$= \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0 t + \alpha)$.

$E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$ (8)

$E_{k_{max}} = E_{p_{max}} = \frac{1}{2}kA^2$ (9)

$E_{k_{min}} = E_{p_{min}} = 0$. De over een periode gemiddelde waarden van (10)

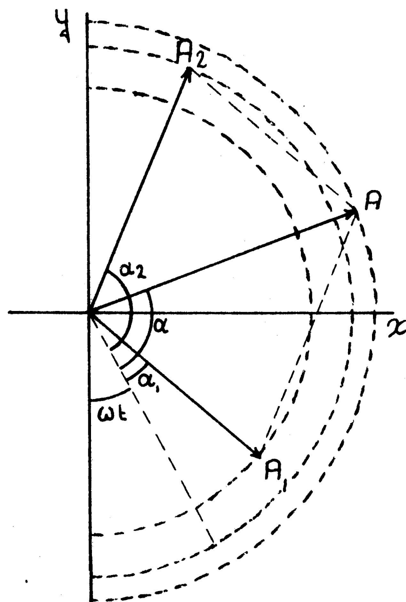
E_p en E_k zijn $\overline{E}_p = \overline{E}_k = \frac{1}{4}kA^2$ (11)

1.2 <u>Superpositie van twee enkelvoudige harmonische trillingen.</u>

a) <u>Zelfde trillingsrichting x, zelfde cirkelfrequentie ω.</u>

Onder andere belangrijk bij de interferentie van licht en geluid.

$x_1 = A_1\sin(\omega t + \alpha_1)$ en $x_2 = A_2\sin(\omega t + \alpha_2)$ (12)



x_1 en x_2 zijn te beschouwen als de projectie van de met constante hoeksnelheid ronddraaiende vectoren $\vec{A}_1$ en $\vec{A}_2$ op de X-as.

$A^2 = A_1{}^2 + A_2{}^2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)$ (13)

$A\cos\alpha = A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2$ (14)

$A\sin\alpha = A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2$ (15)

$$\text{tg}\alpha = \frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2} \quad (16)$$

De superpositie leidt tot een enkelvoudige harmonische trilling met dezelfde frequentie als de samenstellende trillingen. De amplitude A en de beginfase α kunnen eenvoudig worden berekend. $x = A\sin(\omega t+\alpha)$.

Bijzondere gevallen:

a) als $\alpha_1 = \alpha_2$: beide trillingen in fase: $A = A_1 + A_2$; $\alpha = \alpha_1$: (17)
constructieve interferentie, max. intensiteit.

b) als $\alpha_1 = \alpha_2 - \pi$; beide trillingen in tegenfase: $A = A_1 - A_2$; (18)
$\alpha = \alpha_1$: destructieve interferentie, verzwakking c.q. uitdoving.

c) als $\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$ zijn de harmonische bewegingen zogenaamd in kwadratuur (d.w.z. 90° faseverschil).

$$A = (A_1^2 + A_2^2)^{\frac{1}{2}}; \qquad \alpha = \alpha_1 + \text{arctg}\,\frac{A_2}{A_1}\,. \tag{19}$$

b) Zelfde trillingsrichting x, verschillende frequenties ω_1 en ω_2.

Fysische betekenis: zwevingen en modulatie.

$$x_1 = A_1\sin(\omega_1 t+\alpha_1) \quad \text{en} \quad x_2 = A_2\sin(\omega_2 t+\alpha_2) \tag{20}$$

De hoek tussen de eenparig roterende vectoren is $(\omega_1-\omega_2)t + \alpha_1 - \alpha_2$ en dus niet constant. De resulterende vector $\vec{A}$ heeft geen constante grootte en roteert niet eenparig. De beweging $x = x_1 + x_2$ is dan ook niet enkelvoudig harmonisch. De amplitude van deze beweging is

$$A = [A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\{(\omega_1-\omega_2)t + \alpha_1 - \alpha_2\}]^{\frac{1}{2}} \tag{21}$$

en oscilleert tussen $A_1 + A_2$ en $|A_1 - A_2|$ met cirkelfrequentie $\omega_1 - \omega_2$.

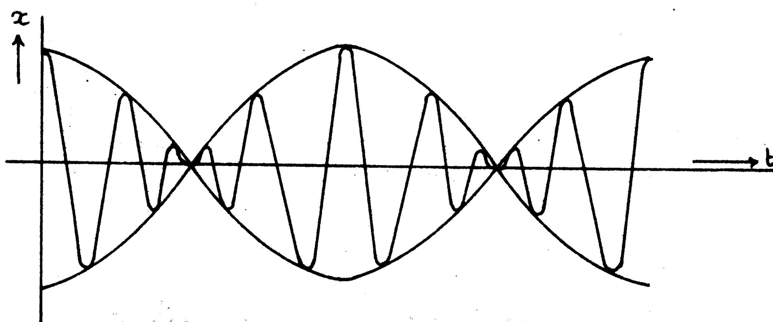
Dit verschijnsel wordt amplitudemodulatie genoemd.

Bij geluid spreekt men in dit geval van zwevingen.

Bijzonder geval: $A_1 = A_2$. Dan is

$$A = 2A_1\cos\tfrac{1}{2}\{(\omega_1-\omega_2)t + \alpha_1 - \alpha_2\} \tag{22}$$

Grafisch beeld:



c) Onderling loodrechte richtingen x en y, dezelfde frequentie ω.

Onder andere belangrijk bij verschijnselen met gepolariseerd licht: kristaloptica.

$x = A\sin\omega t;\ y = B\sin(\omega t+\delta)$ (23)

Faseverschil δ.

1) $\delta = 0$, volgt $y = \frac{B}{A}x$ lineair gepolariseerde trilling (24)

2) $\delta = \frac{\pi}{2}$; $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ elliptisch gepolariseerde trilling (25)

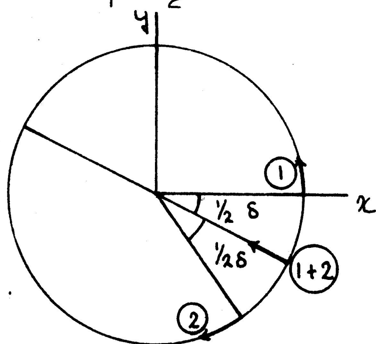
De coördinaatassen zijn de assen van de ellips. Als $A = \pm B$ is de trilling circulair gepolariseerd (Links of rechts afhankelijk van teken).

In het algemeen is het verband tussen x en y, door eliminatie van t verkregen, kwadratisch, en daar $-A \leq x \leq A$ en $-B \leq y \leq B$ is dit verband grafisch gezien een ellips. De assen van de ellips vallen in het algemeen niet samen met de coördinaatassen. Superpositie van een links en rechts circulair gepolariseerde trilling:

links circ.: $x_1 = A\cos\omega t;\ y_1 = A\sin\omega t$ (26)

rechts circ.: $x_2 = A\cos(\omega t-\delta);\ y_2 = -A\sin(\omega t-\delta)$ (27)

$$x = x_1 + x_2 = 2A\cos(\omega t - \frac{\delta}{2})\cos\frac{\delta}{2}\ ;\ y = y_1 + y_2 = 2A\cos(\omega t - \frac{\delta}{2})\sin\frac{\delta}{2} \quad (28)$$



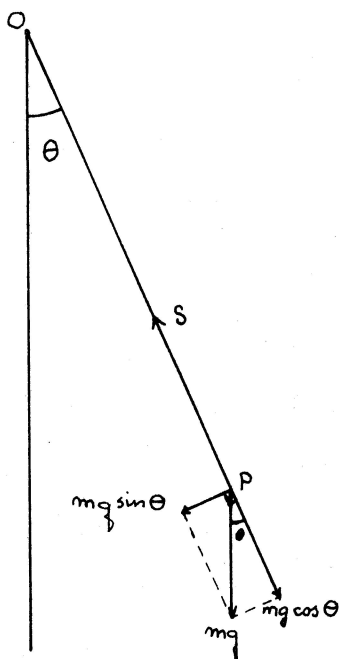
De x en y componenten van de resulterende trilling verschillen niet in fase, dus die trilling is lineair gepolariseerd (geval c 1).

d) Onderling loodrechte richtingen x en y en verschillende frequenties ω_1 en ω_2.

Als de verhouding ω_1/ω_2 rationaal is, wordt er in de resultante een gesloten figuur beschreven: een Lissajous figuur. De functie is periodiek. Als de frequenties zeer weinig verschillen, doorloopt de resultante successievelijk alle elliptische krommen overeenkomstig het faseverschil dat lineair met de tijd verloopt:

$$x = A\sin\omega_1 t;\ y = B\sin\{\omega_1 t + (\omega_2-\omega_1)t\} = B\sin(\omega_1 t+\varepsilon t) \quad (29)$$

1.3 De enkelvoudige mathematische slinger.



Massapunt m in punt P, strak koord OP.

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = mg\cos\theta - S \quad (30)$$

$$F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = - mg\sin\theta. \quad (31)$$

Nu is $\dot{r} = 0$ en $\ddot{r} = 0$ vanwege het strakke koord zodat de bewegingsvergelijkingen worden met $r = OP = l$:

$$-ml\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - S \quad \text{en} \quad (32)$$

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta\ . \quad (33)$$

De eerste vergelijking legt het verband tussen de spanning in het koord S en de centrifugaalkracht $ml\dot{\theta}^2$. De tweede vergelijking wordt lineair als θ zo klein is dat de benadering $\sin\theta = \theta$ (34) geoorloofd is. Als dit het geval is, wordt de oplossing van deze vergelijking

$$\theta = \theta_0\sin(\omega t + \alpha). \quad (35)$$

waarbij $\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}}$ (36)

en de periode $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, onafhankelijk van de massa m.

θ_0, de amplitude en α de beginfase zijn integratieconstanten. Voor grotere uitwijkingshoeken mag de benadering $\sin\theta_0 = \theta_0$ niet worden toegepast. De oplossing van de differentiaalvergelijking is dan aanzienlijk gecompliceerder dan in het benaderde geval. De uitdrukking voor de slingerperiode wordt dan

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}(1 + \tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}\theta_0 + \frac{9}{64}\sin^4\tfrac{1}{2}\theta_0 + \ldots\ldots) \quad (37)$$

Lit.: S 5.6; B 7, p. 197.

T' is niet meer onafhankelijk van θ_0. Als $\theta_0 = 90^\circ$ is T' = 1,16 T.

2. De gedempte vrije harmonische oscillator

In de bewegingsvergelijking staat nu een dempingsterm als gevolg van de wrijvingskracht $\beta\dot{x}$ die evenredig met de snelheid verondersteld is.

$$\boxed{m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0} \qquad (38)$$

Lineaire homogene differentiaalvergelijking van de 2e orde.

Oplossen met behulp van probeerfunctie: $x = Ce^{\lambda t}$. (39)

Substitutie hiervan in de differentiaalvergelijking geeft de zog. karakteristieke vergelijking $m\lambda^2 + \beta\lambda + k = 0$ (40)

Oplossing $\lambda_{1,2} = -\frac{\beta}{2m} \pm \{(\frac{\beta}{2m})^2 - \frac{k}{m}\}^{\frac{1}{2}}$ (41)

Er kunnen 3 gevallen worden onderscheiden:

2.1. Het overaperiodieke geval of overgedempte geval.

$\beta^2 > 4\ km$. Sterke demping. De discriminant van de vierkantsvergelijking is positief en de waarden van λ zijn reëel en negatief.

De oplossing van de differentiaalvergelijking is

$$\boxed{x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}} \qquad (42)$$

waarbij A en B door de beginvoorwaarden zijn bepaald.

x is de som van twee asymptotisch tot 0 naderende e-machten en het massapunt "kruipt" naar de evenwichtsstand.

2.2. Het periodieke geval.

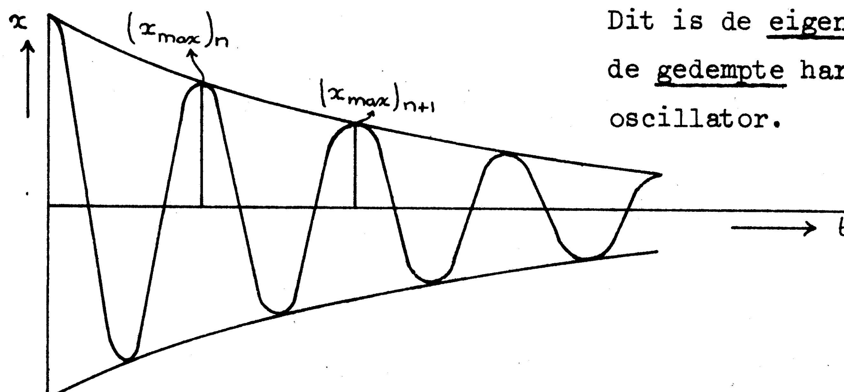
$\beta^2 < 4\ km$. Zwakke demping. De discriminant is negatief en de waarden van λ zijn complex geconjugeerd. Stel $\sqrt{k/m} = \omega_0$ (de cirkelfrequentie van de ongedempte trilling en $\frac{k}{m} - (\frac{\beta}{2m})^2 = \omega_1^2$ (43)

De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking is dan

$x(t) = e^{-\frac{\beta}{2m}t}(C_1 e^{i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_1 t})$ of op reële basis geschreven

$$\boxed{x(t) = De^{-\frac{\beta}{2m}t}\cos(\omega_1 t + \theta)} \qquad (44)$$

D (amplitude) en θ (fase) zijn de integratieconstanten, ω_1 de cirkelfrequentie: $\boxed{\omega_1 = (\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{4m^2})^{\frac{1}{2}}}$ (45)



Dit is de eigenfrequentie van de gedempte harmonische oscillator.

Het logarithmisch decrement δ is gedefinieerd als

$$\delta \equiv \ln \frac{(x_{max})_n}{(x_{max})_{n+1}} \tag{46}$$

$$\delta = \ln \frac{Ae^{-\frac{\beta}{2m}t_n}}{Ae^{-\frac{\beta}{2m}(t_n + T)}} = \frac{\beta T}{2m} = \frac{\beta\pi}{m\omega_1} \tag{47}$$

als $T = \frac{2\pi}{\omega_1}$ de periode van de gedempte oscillator is.

2.3. Het aperiodieke geval.

$\beta^2 = 4$ km. Dit is het geval van zogenaamde kritieke demping.

De discriminant is 0 en de wortels λ_1 en λ_2 zijn reëel en gelijk.

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\beta}{2m}\ . \tag{48}$$

De oplossing $x(t) = Ae^{\lambda t}$ heeft slechts één (49)

integratieconstante en is dus niet de volledige oplossing.

Stel dat de volledige oplossing is $x(t) = u(t)e^{\lambda t}$ (50)

waarbij $u(t)$ een nader te bepalen functie is.

Substitutie van deze oplossing in de differentiaalvergelijking (38) geeft: $e^{\lambda t}\{m\ddot{u} + (2\lambda m + \beta)\dot{u} + (m\lambda^2 + \beta\lambda + k)u\} = 0$ (51)

In het aperiodieke geval is $\lambda = -\frac{\beta}{2m}$ en daar $m\lambda^2 + \beta\lambda + k = 0$ (de karakteristieke vergelijking) zijn de coëfficiënten van $\dot{u}$ en u gelijk nul.

Dus is ook $\ddot{u} = 0$ waaruit volgt $u = A + Bt$ (52-53)

zodat de algemene oplossing is

$$x = (A + Bt)e^{\lambda t} \quad \text{of} \quad \boxed{x = Ae^{-\frac{\beta}{2m}t}(1 + Ct)} \tag{54}$$

met A en C als integratieconstanten.

De waarde van x gaat tamelijk snel naar 0 zonder traag te kruipen zoals in geval 2.1.) en zonder oscillatie om de evenwichtsstand zoals in geval 2.2.).

De energievergelijking van de gedempte harmonische oscillator en de Q-waarde.

De energiedissipatie per seconde is $F\dot{x} = \beta\dot{x}^2$. Volgens de wet van "behoud" van energie moet dit gelijk zijn aan de vermindering van mechanisch vermogen. Dit volgt eenvoudig uit vermenigvuldiging

van de krachtwet met de snelheid:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0 \quad \text{of} \quad m\ddot{x}\dot{x} + \beta\dot{x}^2 + kx\dot{x} = 0 \quad \text{of}$$

$$\tfrac{1}{2}m\,\frac{d}{dt}(\dot{x}^2) + \beta\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}k\,\frac{d}{dt}(x^2) = 0 \quad \text{of} \quad \dot{E}_k + \dot{E}_p = -\,\beta\dot{x}^2 \qquad (55)$$

Voor veel oscillerende systemen met relatief kleine demping is het gebruikelijk de kwaliteitsfactor of Q-waarde op te geven. Deze grootheid is gedefinieerd als

$$Q = 2\pi\,\frac{\text{Totale energie in het systeem}}{\text{energievermindering per periode}} \qquad (56)$$

De totale energie wordt berekend door $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$ te middelen over één periode. De energievermindering per periode is de negatieve tijdafgeleide van de totale energie vermenigvuldigd met T. Bij benadering geldt:

$$Q = 2\pi\,\frac{\overline{E_p + E_k}}{\beta\overline{\dot{x}^2}T} = 2\pi\,\frac{2\overline{E_k}}{\beta\overline{\dot{x}^2}T} = 2\pi\frac{m\overline{\dot{x}^2}}{\beta T\overline{\dot{x}^2}} = \frac{2\pi m}{\beta T} = \frac{m\omega_1}{\beta} = \frac{\pi}{\delta} \qquad (57)$$

Hoe kleiner de dempingsfactor β is, des te groter is Q.

3. De gedempte gedwongen harmonische oscillator

Hierbij is behalve de dempingskracht ook nog een uitwendige kracht werkzaam. Er kunnen verschillende bijzondere gevallen worden onderscheiden.

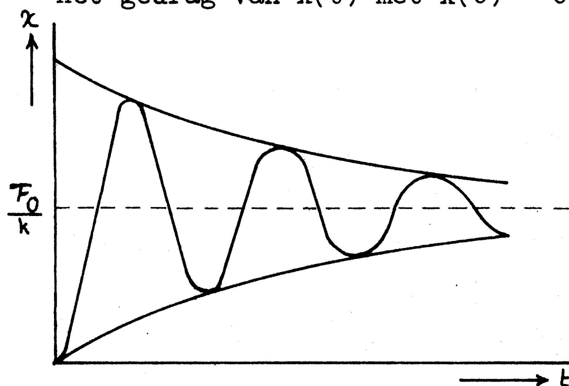
3.1. Vanaf t = 0 werkt een constante kracht F_0.

Stel $x(0) = 0$ en $\dot{x}(0) = 0$.

Voor $t > 0$ geldt $\boxed{m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = F_0}$ (58)

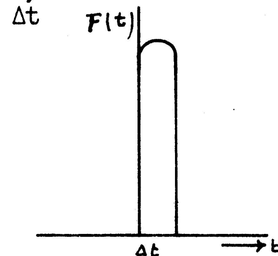
Stel $u = x - \frac{F_0}{k}$, dan is $m\ddot{u} + \beta\dot{u} + ku = 0$. Deze differentiaal- (59-60) vergelijking is in het voorgaande reeds opgelost (verg. 24, p. 44).

Het gedrag van x(t) met $x(0) = 0$ en $\dot{x}(0) = 0$ is in de figuur



weergegeven en wordt sprong-karakteristiek genoemd. Eigenschappen van apparaten en systemen kunnen bepaald worden uit sprongkarakteristieken. (Stuureffect, snelle aanpassing aan nieuwe condities).

3.2. Op het massapunt werkt gedurende korte tijd, Δt, een krachtstoot $\int_{\Delta t} F(t)dt$. Stel de krachtstoot komt op tijd t = 0 en dat



$x(0) = 0$ en $\dot{x}(0) = 0$.

$\boxed{m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = F(t)}$ voor $0 \leqq t \leqq \Delta t$ (61)

Integratie over Δt geeft

$$\int_{\Delta t}(m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx)dt = \int_{\Delta t}F(t)dt \qquad (62)$$

Vanwege de traagheid van het systeem is na een tijd Δt x nog zeer klein en geldt $\int_{\Delta t}kx dt = 0$ en $\int_{\Delta t}\beta\dot{x}dt = 0$. Dan is

$$\int_{\Delta t} m\ddot{x}dt = m\dot{x}(\Delta t) - m\dot{x}(0) = \int_{\Delta t} F.dt \qquad (63)$$

Na de tijd Δt kan het probleem opgevat worden als een vrije oscillator met beginvoorwaarden $x(0) = 0$ en $\dot{x}(0) = \frac{1}{m}\int_{\Delta t} Fdt$ (64)

waarbij $t = \Delta t$ als nieuw nulpunt voor de tijd wordt vastgesteld.

Als de oscillator nu aperiodiek (kritiek) gedempt is, is de

oplossing te schrijven als $x(t) = Ae^{-\frac{\beta}{2m}t} + Bte^{-\frac{\beta}{2m}t}$ (65)

Daar $x(0) = 0$ is $A = 0$; dan is $\dot{x}(t) = Be^{-\frac{\beta}{2m}t} - \frac{\beta B}{2m}te^{-\frac{\beta}{2m}t}$ (66)

Nu is $\dot{x}(0) = \frac{1}{m} \int_{\Delta t} F(t)dt$ (67)

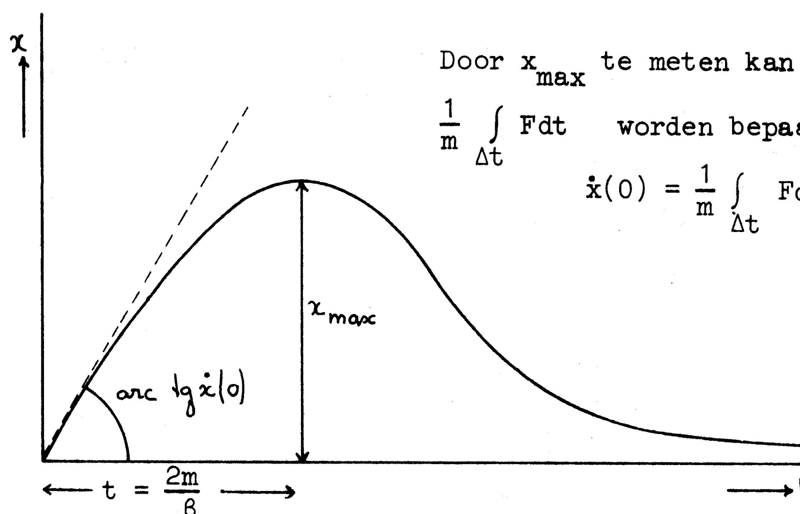
dus is $B = \frac{1}{m} \int_{\Delta t} F(t)dt$ zodat de oplossing wordt

$$x(t) = te^{-\frac{\beta}{2m}t} \cdot \frac{1}{m} \int_{\Delta t} Fdt \qquad (68)$$

Stel $\frac{1}{m} \int_{\Delta t} Fdt = a$, dan is $x(t) = ate^{-\frac{\beta}{2m}t}$ en

$$\dot{x}(t) = a\,e^{-\frac{\beta}{2m}t} - \frac{a\beta}{2m}\,t\,e^{-\frac{\beta}{2m}t}$$

$\dot{x}(t) = 0$ als $t = \frac{2m}{\beta}$ en dit betekent dat $x_{max} = \frac{2am}{e\beta} = \frac{2}{e\beta} \int_{\Delta t} Fdt$. (69)



Door x_{max} te meten kan de grootheid $\frac{1}{m} \int_{\Delta t} Fdt$ worden bepaald. $x_{max} = \frac{2}{e\beta} \int_{\Delta t} Fdt$

$\dot{x}(0) = \frac{1}{m} \int_{\Delta t} Fdt$.

Dit is de zogenaamde ballistische methode.

3.3. Op het massapunt werkt een periodieke uitwendige kracht $F_0 \cos\omega t$. Gemakshalve schrijven we in plaats van $F_0 \cos\omega t$ de complexe uitdrukking $F_0 e^{i\omega t}$; $e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$. (70)

Elke fysische grootheid zoals uitwijking, snelheid, kracht, is reëel en we vinden deze grootheden door het reële gedeelte van de complexe uitdrukkingen te nemen.

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = F_0 e^{i\omega t} \qquad (71)$$

Als de stationaire toestand is ingesteld, oscilleert het systeem met dezelfde frequentie als de uitwendige kracht.

Oplossing van de differentiaalvergelijking proberenderwijs:

$$x = Ae^{i(\omega t-\phi)} \qquad (72)$$

A en ϕ zijn integratieconstanten: A is de amplitude, ϕ het faseverschil tussen kracht en uitwijking. Substitutie van de probeeroplossing in de differentiaalvergelijking (71):

$$- m\omega^2 A + i\beta\omega A + kA = F_0\cos\phi + iF_0\sin\phi \qquad (73)$$

Reële en imaginaire delen gelijkstellen:

$A(k - m\omega^2) = F_0\cos\phi$, $\beta\omega A = F_0\sin\phi$, dus is

$A^2(k - m\omega^2)^2 + \beta^2\omega^2 A^2 = F_0^2$ waaruit volgt

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{\{(k-m\omega^2)^2 + \omega^2\beta^2\}}} \quad (74) \qquad \operatorname{tg}\phi = \frac{\omega\beta}{k - m\omega^2} \quad (75) \qquad (74\text{-}75)$$

De reële oplossing is dan

$$x = \frac{F_0\cos(\omega t - \phi)}{\sqrt{\{(k-m\omega^2)^2 + \omega^2\beta^2\}}} \qquad (76)$$

Deze oplossing representeert de stationaire toestand en wordt derhalve met x_{st} aangeduid. De algemene oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking boven wordt verkregen door bij x_{st} op te tellen de oplossing van de homogene (gereduceerde) vergelijking met tweede lid gelijk nul: $m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = 0$

De oplossing hiervan, voor het periodieke geval, is

$$x_{tr} = De^{-\frac{\beta}{2m}t}\cos(\omega_1 t + \theta) \qquad (77)$$

het zogenaamde inschakel- of aanloopverschijnsel (transient solution), aangegeven met x_{tr}. De volledige oplossing is de som van het aanloopverschijnsel en de stationaire toestand:

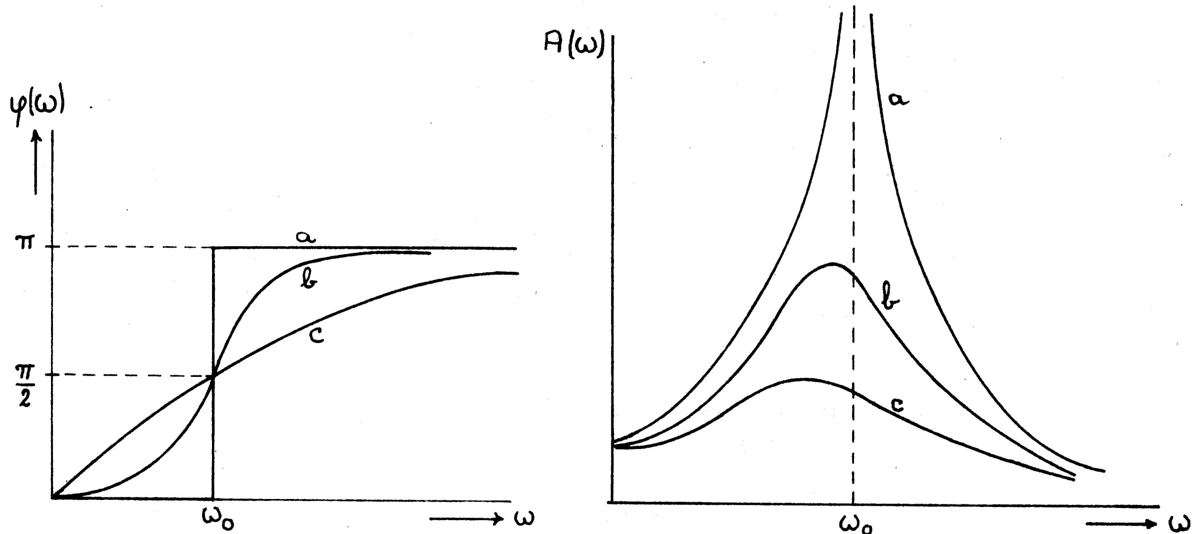
$$x = x_{st} + x_{tr} \qquad (78)$$

In de stationaire toestand die na enige tijd bereikt wordt als het aanloopverschijnsel door demping is verdwenen, is de uitwijking ϕ in fase achter bij de kracht. Met $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, de cirkelfrequentie

van de ongedempte vrije oscillator is

$$tg\phi = \frac{\omega\beta}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \tag{79}$$

Als ω klein is, is ϕ klein. Bij $\omega = \omega_0$ is $\phi = \pi/2$ onafhankelijk van β. Als $\omega >> \omega_0$ gaat ϕ naar π.



De lijnen a hebben betrekking op het geval $\beta = 0$: geen demping
De lijnen b hebben betrekking op het geval $\beta > 0$: middelmatige demping
De lijnen c hebben betrekking op het geval $\beta >> 0$: sterke demping

Voor de amplitude als functie van de frequentie kunnen we met $k = m\omega_0^2$ schrijven:

$$A(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{\{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\beta^2\}}} \tag{80}$$

De maximale waarde van $A(\omega)$ wordt gevonden uit $\frac{dA}{d\omega} = 0$.

Dit treedt op voor $\boxed{\omega = \omega_r = \sqrt{(\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{2m^2})}}$, de (81)

resonantiefrequentie en de waarde van A_{max} is dan

$$A_r = \frac{F_0}{\beta\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{4m^2}}} = \frac{F_0}{\beta\omega_1}. \tag{82}$$

Dit geval wordt amplitude resonantie genoemd. Het fysisch verband

tussen $A(\omega)$ en ω is de zogenaamde <u>resonantiekromme</u>.
De resonantie amplitude A_r gaat naar ∞ als $\beta \to 0$.
Het verschil tussen de resonantiefrequentie ω_r en ω_0 is groter naarmate β groter is. In het ongedempte geval is $\omega_r = \omega_0$.
Opmerkelijk is dat de resonantiefrequentie $\omega_r = \sqrt{(\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{2m^2})}$ niet precies gelijk is aan de eigenfrequentie van de vrije gedempte oscillator: $\omega_1 = \sqrt{(\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{4m^2})}$. (83)

Voor kleine waarden van de dempingsfactor is de amplitude A gelijk aan $\frac{A_r}{\sqrt{2}}$ voor $\omega = \omega_r \pm \frac{\beta}{2m}$ (84)

$\frac{\beta}{2m}$ is de halve breedte van de resonantiekromme op een hoogte $\frac{1}{\sqrt{2}}$ van de topwaarde.

Bewijs:
De waarde van de amplitude is $\frac{A_r}{\sqrt{2}}$, zodat

$$\beta\omega_1\sqrt{2} = \{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (85)$$

Als benadering vervangen we ω_1 door ω_0 (kleine demping) en ω ook door ω_0 behalve in het verschil $\omega_0 - \omega$.

Dan volgt $\beta^2\omega_0^2 = m^2(\omega_0 - \omega)^2.\ (2\omega_0)^2$ of $\omega_0 - \omega = \Delta\omega = \pm \frac{\beta}{2m}$ (86)

Dus is $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \pm \frac{\beta}{2m} = \pm \frac{\delta}{2\pi} = \pm \frac{1}{2Q}$; met $\delta = \frac{\beta\pi}{m\omega}$ het (87)
logarithmisch decrement en $Q = \frac{m\omega}{\beta}$ de kwaliteitsfactor.

De snelheid van de oscillator in stationair trillende toestand is $\dot{x} = \frac{-\omega F_0 \sin(\omega t - \phi)}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + \omega^2\beta^2}}$ (88)

De maximale waarde van de snelheid als functie van de tijd is

$$\dot{x}_A = \frac{\omega F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + \omega^2\beta^2}} \qquad (89)$$

Dit zou de amplitude van de snelheid genoemd kunnen worden.
Deze snelheidsamplitude is een functie van ω en bereikt (exact) een maximale waarde voor $\boxed{\omega = \sqrt{k/m}}$ (90)

zoals eenvoudig volgt uit $\frac{d\dot{x}_A}{d\omega} = 0$.

Dit is precies de cirkelfrequentie ω_0 van de vrije ongedempte harmonische oscillator. Snelheidsresonantie treedt dus -- in tegenstelling met amplitude resonantie -- op bij een frequentie die onafhankelijk van de demping is.

De waarde van de snelheidsamplitude in het resonantiepunt is

$$\boxed{\dot{x}_{A,r} = \frac{F_0}{\beta}} \qquad (91)$$

Uit een vergelijking van de uitwijking met de snelheid volgt dat de snelheid 90° in fase voor is bij de uitwijking.

$F = F_0\cos\omega t$. Als ϕ het faseverschil is tussen kracht en uitwijking, is $x = A\cos(\omega t-\phi)$; $\dot{x} = -A\omega\sin(\omega t-\phi) = A\omega\cos(\omega t-\phi+\frac{\pi}{2}) = A\omega\cos(\omega t-\gamma)$

met $\gamma = \phi-\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{tg}\phi = -\frac{1}{\mathrm{tg}\gamma}$.

$$\mathrm{tg}\phi = \frac{\omega\beta}{k - m\omega^2} \; ; \qquad \mathrm{tg}\gamma = \frac{m\omega^2 - k}{\omega\beta} \qquad (92\text{-}93)$$

γ is het faseverschil tussen kracht en snelheid. Bij snelheidsresonantie is $m\omega^2 = k$ en $\boxed{A_r = \frac{F_0}{\beta\omega_0}}$. $\boxed{\omega = \omega_r = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

Dus $\mathrm{tg}\gamma = 0$ en $\gamma = 0$:

de kracht en de snelheid zijn met elkaar in fase.

Bij amplituderesonantie is het faseverschil tussen kracht en uitwijking 90°.

De arbeid door een uitwendige kracht $F_0\cos\omega t$ op een gedwongen gedempte harmonische oscillator in stationaire trillingstoestand verricht, is gelijk aan de door de wrijvingskracht als warmte gedissipeerde energie. Per seconde is deze arbeid

$$\dot{W} = \dot{x}F_0\cos\omega t = A\omega F_0\cos(\omega t-\gamma)\cos\omega t = A\omega F_0(\cos^2\omega t\cos\gamma + \tfrac{1}{2}\sin 2\omega t\sin\gamma) \qquad (94)$$

Daar $\overline{\cos^2\omega t} = \frac{1}{2}$ en $\overline{\sin 2\omega t} = 0$ (gemiddeld over één of een geheel aantal periodes) is het gedissipeerde vermogen

$$\overline{\dot{W}} = \tfrac{1}{2}A\omega F_0\cos\gamma \qquad (95)$$

Substitutie van formule (74) en $\cos\gamma$, afgeleid van formule (93):

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{\{(k-m\omega^2)^2 + \omega^2\beta^2\}}} \quad \text{en} \quad \cos\gamma = \frac{\omega\beta}{\sqrt{\{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2\beta^2\}}} \quad \text{geeft} \qquad (96\text{-}97)$$

$$\boxed{\overline{\dot{W}} = \frac{F_0^{\,2}\cos^2\gamma}{2\beta}} \qquad (98)$$

Bij snelheidsresonantie ($\gamma = 0$) is de energie overdracht van de uitwendige kracht aan de oscillator maximaal; daarom wordt snelheidsresonantie ook wel energieresonantie genoemd.
Dit kan door de volgende formulering nog worden verduidelijkt.
Het vermogen door de dempingskracht gedissipeerd, is

$$\dot{W} = \beta\dot{x}^2 = \beta A^2\omega^2\cos^2(\omega t - \gamma). \qquad (99)$$

Gemiddeld over één periode is dit:

$$\overline{\dot{W}} = \tfrac{1}{2}\beta A^2\omega^2 = \frac{1}{2}\dot{x}_A^2\beta \qquad \frac{1}{2}i^2R \qquad (100)$$

Uit (96) en (97) volgt $A = \dfrac{F_0}{\omega\beta}\cos\gamma$ (101)

en dus is

$$\overline{\dot{W}} = \frac{F_0{}^2\cos^2\gamma}{2\beta} \quad . \qquad (102)$$

III. MECHANICA VAN EEN SYSTEEM VAN DEELTJES   Lit.: AF 5 ; S 6, 7.

III.A. Zwaartepunt (of Massamiddelpunt) en Zwaartepuntsbeweging. Gereduceerde Massa

De positie van het zwaartepunt is gedefinieerd door de plaatsvector

$$\boxed{\vec{r}_z = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}}$$ als $\vec{r}_i$ de plaatsvectoren van de deeltjes (1)

met massa m_i zijn. $\sum_i m_i = M$ de totale massa der deeltjes. De coördinaten van het zwaartepunt zijn: $x_z = \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i$; $y_z = \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i$;
$z_z = \frac{1}{M} \sum_i m_i z_i$ (2)

De naam zwaartepunt refereert aan gewicht en betekent het aangrijpingspunt van de resultante van de gewichten van alle deeltjes. Daar het zwaartepunt ook van grote betekenis is voor veel andere dan "gewichtsverschijnselen" is het eigenlijk beter om van massamiddelpunt te spreken maar het woord zwaartepunt is in het Nederlands sterk ingeburgerd.
In het Engels is de uitdrukking: center of mass.
De tijdafgeleide van zwaartepuntsvoerstraal is:
$\dot{\vec{r}}_z = \frac{1}{M} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_z$. Noemen we $\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{p}_i = \vec{P}$ de totale impuls van het systeem dan is $\boxed{\vec{P} = M\vec{v}_z}$ (3)

Het systeem van deeltjes kan dus formeel worden opgevat als een massapunt met massa M in het zwaartepunt dat met snelheid $\vec{v}_z$ beweegt.
Als er geen uitwendige krachten op het systeem werken, is de beweging van het zwaartepunt eenparig: $\vec{P}$ is constant.
Een coördinatensysteem met de oorsprong in het zwaartepunt dat met het systeem van deeltjes meebeweegt, wordt zwaartepuntstelsel genoemd. De vectorsom van de impuls van alle deeltjes gemeten in dit stelsel is nul.
Het verdient vaak de voorkeur om een probleem in het zwaartepuntstelsel te formuleren in plaats van in het laboratoriumstelsel; bijvoorbeeld bij botsingsproblemen.

Als er een uitwendige kracht $\vec{F}^e$ op het systeem werkt, is $\boxed{\dot{\vec{P}} = \vec{F}^e}$
Daar $\boxed{\dot{\vec{P}} = M\vec{a}_z}$ is $\boxed{\vec{F}^e = M\vec{a}_z}$ (4)

Het zwaartepunt beweegt alsof er een uitwendige kracht $\vec{F}^e$ werkt op een puntmassa $M = \sum_i m_i$ in het zwaartepunt.

Systeem van 2 deeltjes. Deeltje 2 oefent op deeltje 1 een kracht $\vec{F}_{12}$, deeltje 1 op deeltje 2 een kracht $\vec{F}_{21}$ uit. Volgens de 3e wet van Newton is $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. (5)

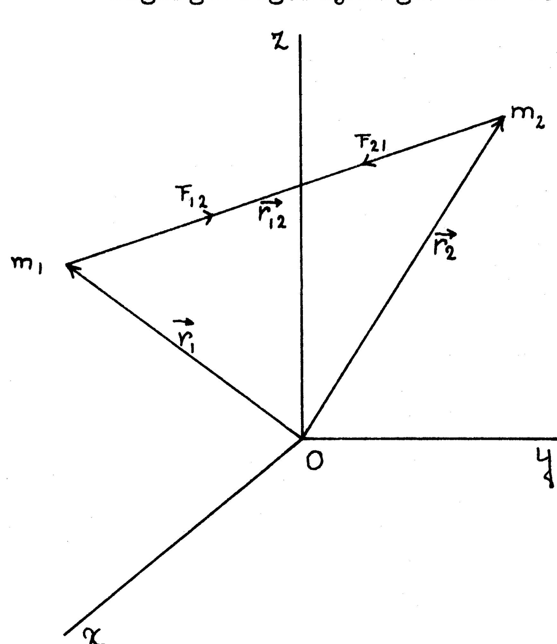
Als de uitwendige kracht op deeltje 1 $\vec{F}_1^e$ is en op deeltje 2 $\vec{F}_2^e$, dan is $\dot{\vec{p}}_1 = \vec{F}_1^e + \vec{F}_{12}$; $\dot{\vec{p}}_2 = \vec{F}_2^e + \vec{F}_{21}$; $\dot{\vec{P}} = \dot{\vec{p}}_1 + \dot{\vec{p}}_2 = \vec{F}_1^e + \vec{F}_2^e$ daar $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$

In het algemeen voor n deeltjes dus $\dot{\vec{P}} = \sum_i \vec{F}_i^e$ (6)

De uitwendige kracht die werkt op een systeem van deeltjes is dus gelijk aan de som van alle uitwendige krachten die werken op alle deeltjes.

Gereduceerde massa.

Van twee deeltjes waarop geen uitwendige krachten werken, kunnen de bewegingsvergelijkingen als volgt worden geformuleerd:



$\vec{F}_{12} = m_1\ddot{\vec{r}}_1 \qquad \vec{F}_{21} = m_2\ddot{\vec{r}}_2$

Daar $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ is $\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = (\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2})\vec{F}_{12}$

$\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \ddot{\vec{r}}_{12}$ is de versnelling $\vec{a}_{12}$ van m_1 ten opzichte van m_2. (Zie pag. ~~19~~ 25)

Dus $\vec{a}_{12} = (\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2})\vec{F}_{12} = \frac{1}{\mu}\vec{F}_{12}$ (7)

μ wordt de gereduceerde massa van het systeem van m_1 en m_2 genoemd.

$$\boxed{\frac{1}{\mu} \equiv \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} \qquad (8)$$

De relatieve beweging van twee deeltjes is dus equivalent met die van één deeltje met gereduceerde massa μ onder invloed van de wisselwerkingskracht $\vec{F}_{12}$.

De beweging van twee deeltjes m_1 en m_2 kan in het algemeen formeel gescheiden worden in twee bewegingen:

1) de beweging van een puntmassa $M = m_1 + m_2$ in het zwaartepunt en

2) de beweging van een puntmassa $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ met snelheid $\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$. Dit kan eenvoudig worden bewezen door te laten zien dat de impuls van de beide deeltjes

m_1 en m_2 t.o.v. het bewegende zwaartepunt gelijk is aan resp. $+\mu\vec{v}_{12}$ en $-\mu\vec{v}_{12}$. De snelheid van het zwaartepunt is namelijk

$\vec{v}_z = \dfrac{m_1\dot{\vec{r}}_1 + m_2\dot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2}$ zodat de snelheid van de deeltjes ten opzichte van het zwaartepunt resp. $\dfrac{m_2\vec{v}_{12}}{m_1 + m_2}$ en $-\dfrac{m_1\vec{v}_{12}}{m_1 + m_2}$ is. (Galilei transformatie)

Hun impulsen ten opzichte van het zwaartepunt zijn $\mu\vec{v}_{12}$ en $\mu\vec{v}_{21}$ (de som is nul).

Als de deeltjes m_1 en m_2 dezelfde massa hebben, is $\mu = \frac{1}{2}m$; als $m_1 << m_2$ is

$$\mu = \frac{m_1}{1 + \dfrac{m_1}{m_2}} \approx m_1\left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) \tag{9}$$

III.B. Impulsmoment en Behoud van Impulsmoment

Voor één deeltje is het impulsmoment $\vec{J} = \vec{r}\times\vec{p}$ en het verband tussen krachtmoment $\vec{M}$ en impulsmoment $\vec{J}$ is $\vec{M} = \dot{\vec{J}}$ (Zie II.B.6). Voor twee deeltjes: $\vec{M}_1 = \dot{\vec{J}}_1$ en $\vec{M}_2 = \dot{\vec{J}}_2$ dus $\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \frac{d}{dt}(\vec{J}_1 + \vec{J}_2)$.

Uitwendige krachten $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$, inwendige krachten $\vec{F}_{12}$ en $\vec{F}_{21}$.

3e Wet van Newton: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$; $\vec{M}_1 = \vec{r}_1\times(\vec{F}_1 + \vec{F}_{12}) = \vec{r}_1\times\vec{F}_1 + \vec{r}_1\times\vec{F}_{12}$

$\vec{M}_2 = \vec{r}_2\times(\vec{F}_2 + \vec{F}_{21}) = \vec{r}_2\times\vec{F}_2 + \vec{r}_2\times\vec{F}_{21}$

$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \vec{r}_1\times\vec{F}_1 + \vec{r}_2\times\vec{F}_2 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\times\vec{F}_{21}$.

Als $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ de richting heeft van $\vec{r}_{21}$ wat voor interne krachten in het algemeen geldt, is $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\times\vec{F}_{21} = 0$, dus $\dot{\vec{J}}_1 + \dot{\vec{J}}_2 = \vec{M}^e_1 + \vec{M}^e_2$, waarbij $\vec{M}^e_1$ en $\vec{M}^e_2$ de momenten zijn van de uitwendige krachten. In het algemeen geldt voor een systeem van meer deeltjes $\boxed{\dot{\vec{J}} = \vec{M}^e}$ (10)

waarbij $\vec{J} = \sum_i \vec{J}_i$ en $\vec{M}^e = \sum_i \vec{M}^e_i$.

De verandering van het totale impulsmoment per sec. t.o.v. een willekeurig punt van een systeem van deeltjes is gelijk aan het moment ten opzichte van ditzelfde punt van de uitwendige krachten die werken op het systeem. Als het moment van de uitwendige krachten nul is, is het totale impulsmoment van het systeem constant in richting en grootte.

Dit is de wet van behoud van impulsmoment.

Impulsmoment in het zwaartepuntstelsel.

De wet $\vec{M}^e = \dot{\vec{J}}$ geldt voor een systeem van deeltjes niet alleen in een inertiestelsel maar ook in het zwaartepuntstelsel, een stelsel met de oorsprong in het willekeurig bewegende zwaartepunt van het systeem terwijl de assen evenwijdig blijven aan de assen van het inertiestelsel.

Dan is $\vec{r}_i = \vec{r}_i^{\,z} + \vec{r}_z$; $\vec{r}_i$ is de voerstraal van het i^e (11)

deeltje vanuit de oorsprong van het inertiestelsel, $\vec{r}_z$ de voerstraal van het zwaartepunt en $\vec{r}_i^{\,z}$ de voerstraal van het i^e deeltje vanuit het zwaartepunt als oorsprong.

$$\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_i^{\,z} + \dot{\vec{r}}_z \quad \text{of} \quad \vec{v}_i = \vec{v}_i^{\,z} + \vec{v}_z, \quad \text{dus} \tag{12}$$

$$\vec{J} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i = \sum_i (\vec{r}_i^{\,z} + \vec{r}_z) \times m_i(\vec{v}_i^{\,z} + \vec{v}_z) =$$

$$= \sum_i m_i\vec{r}_i^{\,z}\times \vec{v}_i^{\,z} + \sum_i m_i\vec{r}_i^{\,z}\times \vec{v}_z + \sum_i m_i\vec{r}_z\times \vec{v}_i^{\,z} + \sum_i m_i\vec{r}_z\times \vec{v}_z \tag{13}$$

De tweede term van deze vierterm is 0 vanwege de definitie van zwaartepunt: $\sum_i m_i\vec{r}_i^{\,z} = 0$. Het bewijs hiervan is als volgt.

$\vec{r}_i = \vec{r}_i^{\,z} + \vec{r}_z$; dus is $\sum m_i\vec{r}_i = \sum m_i\vec{r}_i^{\,z} + \sum m_i\vec{r}_z$. Nu is per definitie

$\sum m_i\vec{r}_i = M\,\vec{r}_z$ en ook is $\sum m_i\vec{r}_z = M\,\vec{r}_z$; dus is $\sum m_i\vec{r}_i^{\,z} = 0$. (14)

De derde term van (13) is ook 0, want

$$\sum_i m_i\vec{r}_z \times \vec{v}_i^{\,z} = \vec{r}_z \times \sum_i m_i\vec{v}_i^{\,z} \quad \text{en} \quad \sum_i m_i\vec{v}_i^{\,z} = \sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i^{\,z} = 0.$$

Dus $\vec{J} = \sum_i m_i\vec{r}_i^{\,z} \times \vec{v}_i^{\,z} + \sum_i m_i\vec{r}_z \times \vec{v}_z$. (15)

De laatste term kan geschreven worden als $\vec{L} = \vec{r}_z \times \vec{P}$ waarbij $\vec{P}$ (16) de impuls is van de totale massa van het systeem geconcentreerd in het zwaartepunt. Deze term wordt baanimpulsmoment genoemd.

De term $\sum_i m_i\vec{r}_i^{\,z} \times \vec{v}_i^{\,z} \equiv \vec{S}$ geeft het impulsmoment van de (17) beweging ten opzichte van het zwaartepunt aan en wordt spinimpulsmoment $\vec{S}$ genoemd. Beknopt geformuleerd:

$$\boxed{\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}} \;. \tag{18}$$

Het totale impulsmoment $\vec{J}$ kan dus worden beschouwd als de vectorsom van het baanimpulsmoment $\vec{L}$ en het spinimpulsmoment $\vec{S}$.
Differentiatie naar de tijd van (18) geeft met het oog op (16)

$\dot{\vec{J}} = \dot{\vec{S}} + \dot{\vec{r}}_z \times \vec{P} + \vec{r}_z \times \dot{\vec{P}}$ daar $\dot{\vec{r}}_z$ en $\vec{P}$ dezelfde richting hebben, is

$\dot{\vec{r}}_z \times \vec{P} = 0$; $\dot{\vec{J}} = \dot{\vec{S}} + \vec{r}_z \times \dot{\vec{P}}$. (19)

Nu geldt $\vec{M}^e = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\,e} = \sum_i \vec{r}_i^{\,z} \times \vec{F}_i^{\,e} + \sum_i \vec{r}_z \times \vec{F}_i^{\,e} = \vec{M}^{ez} + \vec{r}_z \times \sum_i \vec{F}_i^{\,e}$

Verder is $\vec{M}^e = \dot{\vec{J}}$ en $\dot{\vec{P}} = \sum_i \vec{F}_i^{\,e}$, (20-21)

dus is $\vec{M}^{ez} = \dot{\vec{S}}$. (22)

Er resulteren tenslotte drie bewegingsvergelijkingen:

1) $\boxed{\dot{\vec{P}} = M\ddot{\vec{r}}_z = \sum_i \vec{F}_i^{\,e}}$: de translatie van het zwaartepunt; (23)

2) $\boxed{\dot{\vec{L}} = \vec{r}_z \times \dot{\vec{P}} = \vec{r}_z \times M\ddot{\vec{r}}_z = \vec{r}_z \times \sum_i \vec{F}_i^{\,e}}$: de rotatie van het zwaartepunt; (24)

3) $\boxed{\dot{\vec{S}} = \sum_i \vec{r}_i^{\,z} \times \vec{F}_i^{\,e} = \vec{M}^{ez}}$: de draaibeweging van het systeem om (25) het zwaartepunt (spin) onafhankelijk van de beweging van het zwaartepunt.

De spinbeweging en zwaartepuntsbeweging kunnen dus van elkaar worden gescheiden (gesepareerd).

III. C. Kinetische Energie en Behoud van Energie

We beschouwen gemakshalve weer twee deeltjes met massa m_1 en m_2 waarop uitwendige krachten $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ en inwendige krachten $\vec{F}_{12}$ en $\vec{F}_{21}$ werken. Voor meer dan 2 deeltjes gelden analoge formules met dezelfde resultaten.

$m_1\vec{a}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_{12}$; $m_2\vec{a}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_{21}$. Om een uitdrukking voor de energie te krijgen, worden deze krachten scalair vermenigvuldigd met lijnelementen, resp. $d\vec{r}_1$ en $d\vec{r}_2$, dat zijn de verplaatsingen van m_1 en m_2 in de tijd dt langs hun baan.

$m_1\vec{a}_1 \cdot d\vec{r}_1 = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_1$; $m_2\vec{a}_2 d\vec{r}_2 = \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_2$

Optelling:

$m_1\vec{a}_1.d\vec{r}_1 + m_2\vec{a}_2.d\vec{r}_2 = \vec{F}_1.d\vec{r}_1 + \vec{F}_2.d\vec{r}_2 + \vec{F}_{12}.d\vec{r}_{12}$ daar $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

en $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}_{12}$.

$\vec{a}.d\vec{r} = \dot{\vec{v}}.\dot{\vec{r}}\,dt = \dot{\vec{v}}.\vec{v}\,dt = \vec{v}.d\vec{v}$

$$m_1\int \vec{v}_1 d\vec{v}_1 + m_2\int \vec{v}_2 d\vec{v}_2 = \int(\vec{F}_1.d\vec{r}_1 + \vec{F}_2.d\vec{r}_2) + \int \vec{F}_{12}.d\vec{r}_{12} \qquad (26)$$

De integratiegrenzen van de integralen in het linkerlid zijn begin- en eindsnelheid, de grenzen in het rechterlid de voerstralen van begin- en eindpunt. In het linkerlid staat dan de toename van de kinetische energie $\Delta E_k = \left|\tfrac{1}{2}m_1v_1^{\,2} + \tfrac{1}{2}m_2v_2^{\,2}\right|_{t_1}^{t_2}$, (27)

in het rechterlid de arbeid door de uitwendige krachten verricht ΔW^e en de arbeid door de inwendige krachten verricht ΔW^i, dus is

$$\Delta E_k = \Delta W^e + \Delta W^i \qquad (28)$$

De toename van de kinetische energie is gelijk aan de arbeid door uitwendige- en inwendige krachten samen op het systeem verricht. Als de inwendige krachten conservatief zijn, bestaat er voor deze een potentiaalfunctie en geldt $\Delta W^i = -\Delta E_p^{\,i}$, de afname van de inwendige potentiële energie. Als de uitwendige krachten ook conservatief zijn, geeft dit voor ΔW^e een potentiële energieverandering $-\Delta E_p^{\,e}$. In dat geval is $\Delta(E_k + E_p^{\,i} + E_p^{\,e}) = 0$, dat wil zeggen de totale energie van het systeem

$\boxed{E_k + E_p^{\,i} + E_p^{\,e} = C}$ is constant als alle krachten, (29)

inwendige zowel als uitwendige conservatief zijn.

Energiestelling in het zwaartepuntstelsel.

$$E_k = \sum_i \tfrac{1}{2}m_iv_i^{\,2} = \sum_i \tfrac{1}{2}m_i(\vec{v}_i^{\,z} + \vec{v}_z)^2 = \sum_i \tfrac{1}{2}m_iv_i^{\,z^2} + \sum_i \tfrac{1}{2}m_iv_z^{\,2} + \sum_i m_i\vec{v}_i^{\,z}\vec{v}_z \qquad (30)$$

Nu is $\sum_i \tfrac{1}{2}m_iv_i^{\,z^2} = E_k^{\,z}$ de kinetische energie van de beweging ten opzichte van het zwaartepunt.

$\sum_i m_i\vec{v}_i^{\,z}.\vec{v}_z = \vec{v}_z.\sum_i m_i\vec{v}_i^{\,z} = \vec{v}_z . \frac{d}{dt}(\sum_i m_i\vec{r}_i^{\,z}) = 0$ wegens de definitie van zwaartepunt.

$\sum_i \tfrac{1}{2}m_iv_z^{\,2} = \tfrac{1}{2}Mv_z^{\,2}$ de kinetische energie van een deeltje waarvan de massa de totale massa van dit systeem is met de snelheid van het

zwaartepunt. Dus is $\boxed{E_k = E_k^{\,z} + \tfrac{1}{2}Mv_z^{\,2}}$ (31)

Evenals het impulsmoment kan ook de kinetische energie in twee termen worden gesplitst, een term voor de beweging ten opzichte van het zwaartepunt en een term voor de beweging van het zwaartepunt.

Voor twee deeltjes is $E_k^{\,z} = \tfrac{1}{2}\mu v_{12}^{\,2}$: zie pag. 76. (32)

Overzicht van de formules van de mechanica van een systeem van deeltjes:

Kinematische vergelijkingen:

$\vec{P} = M\vec{v}_z$; $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ met $\vec{L} = \vec{r}_z \times \vec{P}$ en $\vec{S} = \sum_i m_i \vec{r}_i^{\,z} \times \vec{v}_i^{\,z}$ (33-36)

Dynamische vergelijkingen:

$\dot{\vec{P}} = M\ddot{\vec{r}}_z = \sum_i \vec{F}_i^{\,e}$; $\dot{\vec{J}} = \vec{M}^e$, te splitsen in $\dot{\vec{L}} = \vec{r}_z \times \dot{\vec{P}}$ en $\dot{\vec{S}} = \vec{M}^{ez}$. (37-40)

Energievergelijkingen:

$E_k + E_p^{\,i} + E_p^{\,e} = C$ voor conservatieve inwendige en uitwendige krachten; (41)

$E_k = E_k^{\,z} + \tfrac{1}{2}Mv_z^{\,2}$. (42).

III. D. Botsingen

Bij een botsing tussen twee deeltjes is er veelal slechts een kortstondige sterke wisselwerking gedurende de tijd τ dat de deeltjes elkaar raken. Voor en na de botsing oefenen de deeltjes geen krachten op elkaar uit en de potentiële energie der wisselwerkingskrachten is dan nul. De deeltjes bewegen voor en na de botsing eenparig.

Stel m_1 en m_2 hebben voor de botsing de snelheid resp. $\vec{u}_1$ en $\vec{u}_2$, na de botsing $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$. Volgens de 3e wet van Newton is tijdens de botsing $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. De tijdintegralen van deze krachten, (dat wil zeggen krachtstoten) als de deeltjes een tijd τ met elkaar in contact zijn geweest, zijn $\int_0^\tau \vec{F}_{12}dt$ en $\int_0^\tau \vec{F}_{21}dt$; dus is $\int_0^\tau \vec{F}_{12}dt + \int_0^\tau \vec{F}_{21}dt = 0$ (43)

zodat de totale impulsverandering nul is.

Hieruit volgt $\boxed{m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}$ (44)

Dit is de wet van behoud van impuls (een vectorvergelijking) die universeel geldig is voor alle soorten botsingen.

Een grootheid waarmee de soort der botsing gekarakteriseerd kan worden,

is de zogenaamde restitutiecoëfficiënt $C_R \equiv \dfrac{|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|}{|\vec{u}_1 - \vec{u}_2|}$ (45)

de verhouding van de absolute waarden van de relatieve snelheden na en voor de botsing.

Botsingen kunnen worden onderscheiden in centrale- (of rechte-) en niet-centrale (of scheve-) botsingen.

Bij centrale botsingen bewegen de massa's m_1 en m_2 voor en na de botsing langs dezelfde rechte lijn.

Verder kunnen botsingen worden onderscheiden in elastische-, niet-elastische- en volkomen inelastische botsingen.

Bij een elastische botsing is er behoud van kinetische translatie-energie. In het geval van een elastische botsing van de deeltjes m_1 en m_2 die voor de botsing de snelheid resp. $\vec{u}_1$ en $\vec{u}_2$ en na de botsing de snelheid $\vec{v}_1$ en $\vec{v}_2$ hebben, gelden dus de twee behoudswetten:

$$m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 \qquad (46)$$

$$\tfrac{1}{2}m_1u_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2u_2^2 = \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 \qquad (47)$$

De impuls en de kinetische energie van de zwaartepuntsbeweging blijven behouden vanwege de wet van impuls. Dus moet de kinetische energie bij een elastische botsing in het zwaartepuntsysteem ook behouden blijven. Deze kinetische energie is voor de botsing $\frac{1}{2}\mu u_{12}^2$ en na de botsing $\frac{1}{2}\mu v_{12}^2$. Dus is $u_{12}^2 = v_{12}^2$ en $|\vec{u}_1 - \vec{u}_2| = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$ (48)

De restitutiecoëfficiënt $C_R = 1$ in dit geval. Dit geldt zowel voor centrale als niet-centrale elastische botsingen.

Bij een volkomen inelastische botsing kleven de deeltjes bij de botsing als het ware aan elkaar en bewegen vervolgens als een eenheid $m_1 + m_2$ met één snelheid $\vec{v}$. In dit geval is $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}$ en $C_R = 0$.

Botst het deeltje m_1 met snelheid $\vec{u}$ volkomen inelastisch tegen een stilstaand deeltje m_2 dan is (wet van behoud van impuls)

$m_1\vec{u} = (m_1 + m_2)\vec{v}$, dus (49)

$$\vec{v} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\,\vec{u} \qquad (50)$$

De kinetische energie van het systeem vóór de botsing is $\frac{1}{2}m_1u^2$, na de botsing $\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = \frac{1}{2}\,\frac{m_1^{\,2}}{m_1 + m_2}\,u^2$ (51)

De verhouding van de kinetische energieën na en voor de botsing is dus $\frac{m_1}{m_1 + m_2}$. Van de oorspronkelijke kinetische energie is dan de fractie $\frac{m_2}{m_1 + m_2}$ in een andere vorm van energie (warmte of excitatie-energie) omgezet.

De wet van behoud van impuls is een vectorvergelijking, dat wil zeggen in de driedimensionale ruimte zijn er in principe drie (componenten) vergelijkingen.

Bij botsingen van twee deeltjes liggen de snelheden vóór en na de botsing in één vlak en zijn er twee (componenten) vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned} m_1u_{1x} + m_2u_{2x} &= m_1v_{1x} + m_2v_{2x} \\ m_1u_{1y} + m_1y_{2y} &= m_1v_{1y} + m_2v_{2y} \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

Bij elastische botsingen geldt behalve de impulsvergelijking de energievergelijking maar deze laatste is slechts één vergelijking van scalaire grootheden:

$$\boxed{\tfrac{1}{2}m_1u_1^{\,2} + \tfrac{1}{2}m_2u_2^{\,2} = \tfrac{1}{2}m_1v_1^{\,2} + \tfrac{1}{2}m_2v_2^{\,2}} \qquad (53)$$

Mechanische energie blijft alleen behouden als de inwendige krachten conservatief zijn.

De wet van behoud van impuls is universeel geldig, maar moet bij botsingen met beperkte bewegingsvrijheid worden uitgebreid met de wet van behoud van impulsmoment.

De wet van behoud van impuls kan in verband worden gebracht met het feit dat het behoud van totale energie en massa invariant is voor Galilei transformatie.

Als voorbeeld kan dienen het geval van inelastische botsing van twee deeltjes m_1 en m_2 die voor de botsing snelheid $\vec{u}$ en na de botsing snelheid $\vec{v}$ hebben. Dan is

$$\tfrac{1}{2}m_1u_1^{\,2} + \tfrac{1}{2}m_2u_2^{\,2} = \tfrac{1}{2}m_1v_1^{\,2} + \tfrac{1}{2}m_2v_2^{\,2} + E \qquad (54)$$

waarbij E de in warmte- of excitatie energie omgezette bewegingsenergie van de deeltjes is. De Galilei transformatie houdt nu in dat

$$\vec{u}_1' = \vec{u}_1 - \vec{w};\quad \vec{u}_2' = \vec{u}_2 - \vec{w};\quad \vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{w};\quad \vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{w}. \qquad (55)$$

Als E in het geaccentueerde en ongeaccentueerde stelsel hetzelfde is, is door substitutie van de geaccentueerde snelheden in de energievergelijking terstond af te leiden: $m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$, (56)
de wet van behoud van impuls.
Ook bij chemische reacties kan op deze wijze de geldigheid van de wet van behoud van impuls worden aangetoond (Lit.: B 3, p. 73).

Het verdient vaak aanbeveling botsingsproblemen op te lossen met een formulering in het zwaartepuntstelsel. In dit stelsel maken de snelheden der twee botsende deeltjes zowel voor als na de botsing een hoek van 180° met elkaar.

Een belangrijke vraag in de atoom-, molecuul- en kernfysica is welk deel van de kinetische energie bij botsingen van twee deeltjes kan worden omgezet in een andere vorm van energie, bijvoorbeeld excitatie-energie. De kinetische energie E_k wordt gesplitst in een term waarin de kinetische energie van de beweging ten opzichte van het zwaartepunt E_k^z wordt weergegeven en een term voor de kinetische energie van de beweging van de totale massa als puntmassa in het zwaartepunt (zie verg. 31, p. 73).

$$E_k = E_k^z + \tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v_z^2 \qquad (57)$$

$$E_k^z = \tfrac{1}{2}m_1(\vec{v}_z - \vec{v}_1)^2 + \tfrac{1}{2}m_2(\vec{v}_z - \vec{v}_2)^2 \qquad (58)$$

$\vec{v}_z$ kan worden berekend uit de wet van behoud van impuls.

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}_z \quad \text{dus} \quad \vec{v}_z = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_2 \qquad (59)$$

Uitwerking geeft

$$E_k^z = \tfrac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)^2 = \tfrac{1}{2}\mu v_{12}^2 \quad \text{waarbij } \mu \text{ de gereduceerde} \qquad (60)$$

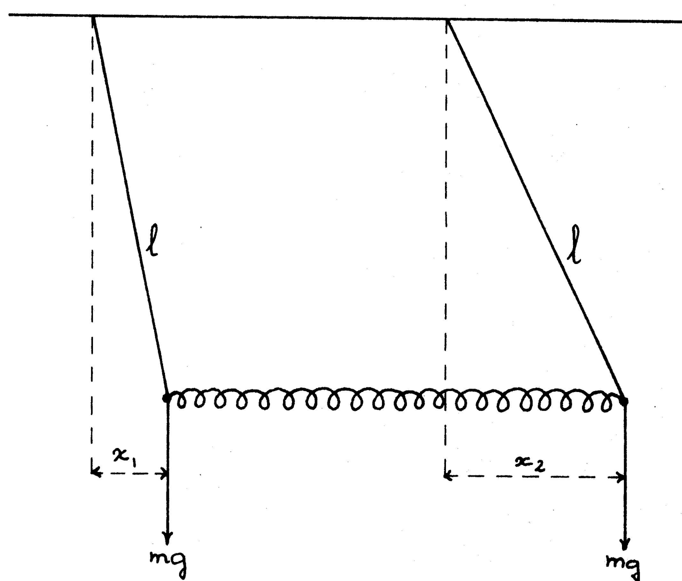
massa is en $\vec{v}_{12}$ de relatieve snelheid. $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ (pag. 68 verg. 8.)
Daar de energieterm $\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_z^2$ constant blijft wegens de wet van behoud van impuls kan slechts de energie $\boxed{E_k^z = \tfrac{1}{2}\mu v_{12}^2}$ (61)
maximaal in excitatie-energie worden omgezet.

In het bovenstaande werd verondersteld dat de deeltjes bij de botsing materieel contact met elkaar hebben. In de atoom- en kernfysica komen botsingen voor tussen deeltjes die in feite geen materieel contact hebben. Men kan bijvoorbeeld denken aan het geval van een proton dat in de richting van een atoomkern beweegt maar dat deze kern niet kan bereiken tengevolge van de afstotende coulombkracht. Het proton wordt reeds weggestoten (verstrooid) als het zich op eindige afstand van de kern bevindt. In dit geval is de afstotende werking tussen de twee botsende deeltjes proton en kern bolsymmetrisch en is het botsingsverschijnsel vergelijkbaar met de contact-botsing van bijvoorbeeld twee biljartballen. Het enige verschil is dat bij contactbotsingen de wisselwerking tussen de lichamen slechts gedurende de kortstondige aanraking optreedt dus in een zeer klein ruimtegebied, terwijl bij de elektrische afstoting tussen geladen deeltjes de krachtwerking zich over een relatief groot gebied afspeelt.

III. E. Gekoppelde Oscillatoren   Lit.: S 5.20; AF 8.10.

Als verschillende vibrerende systemen invloed op elkaar uitoefenen, spreken we van gekoppelde oscillatoren. Voorbeelden hiervan zijn elektrische trillingsketens die inductief of capacitief gekoppeld zijn, vibraties van verschillende atomen in een molecuul en van ionen in een kristalrooster. Ook bij trillingen van snaren en platen zijn de trillende deeltjes met elkaar gekoppeld.

We beschouwen het eenvoudigste geval, namelijk twee identieke ongedempte mathematische slingers die verbonden zijn door een veer met veerconstante f en die kleine uitwijkingen vertonen zodat de terugdrijvende krachten resp. $\frac{mgx_1}{l}$ en $\frac{mgx_2}{l}$ zijn.



De krachten die door de veer op beide massa's worden uitgeoefend, zijn gelijk doch tegengesteld en evenredig met de uitrekking of indrukking van de veer.

Dan zijn de bewegingsvergelijkingen

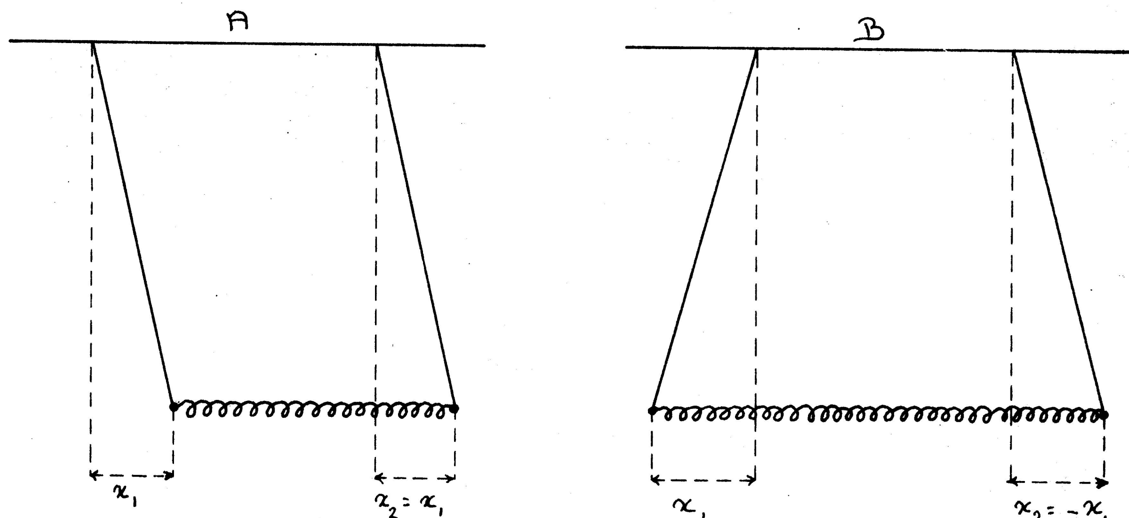
$$m\ddot{x}_1 = -\frac{mg}{l}x_1 + f(x_2 - x_1)$$
$$m\ddot{x}_2 = -\frac{mg}{l}x_2 - f(x_2 - x_1) \quad (62)$$

Voor de mathematische implicaties van de oplossing van deze twee simultane differentiaalvergelijkingen kan worden verwezen naar de geciteerde literatuur. Het blijkt dat de beide slingers harmonische trillingen uitvoeren die kunnen worden beschouwd als de resultante of superpositie van twee harmonische trillingen waarvan de cirkelfrequenties zijn $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ en $\omega_2 = \sqrt{\frac{k+2f}{m}}$ waarbij $k = \frac{mg}{l}$ (63)

Dit zijn de <u>eigenfrequenties</u> of <u>karakteristieke frequenties</u> (of <u>normale-</u>) (Engels: <u>normal vibrations</u>, <u>normal modes</u>) van het systeem.

Deze eigenfrequenties kunnen in "zuivere toestand" worden verkregen

door de slingers één keer gelijke en gelijkgerichte (A) en één keer gelijke, doch tegengesteld gerichte (B) uitwijkingen te geven en ze vervolgens los te laten; zie figuur.



In geval A is $x_2 - x_1 = 0$ en worden de bewegingsvergelijkingen voor beide oscillatoren identiek: $m\ddot{x} = -kx$. Eigenfrequentie $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. (64)

Dit is dezelfde frequentie als die van elk der slingers afzonderlijk. De slingers bewegen identiek en in fase en de uitrekking van de veer is te allen tijde nul. $x_1 = A_1\sin(\omega_1 t+\alpha_1)$; $x_2 = A_1\sin(\omega_1 t+\alpha_1)$. (65)

In geval B worden de bewegingsvergelijkingen ook identiek, namelijk $m\ddot{x} = -kx - 2fx$ en de beide slingers voeren weer identieke bewegingen uit, echter in tegenfase. $x_1 = A_2\sin(\omega_2 t+\alpha_2)$; $x_2 = -A_2\sin(\omega_2 t+\alpha_2)$. (66)

De veer wordt nu periodiek uitgerekt en ingedrukt en de eigenfrequentie is

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2f}{m}} \qquad (67)$$

Trillingstoestand A kan formeel worden opgevat als de trilling van het zwaartepunt der beide slingers, trillingstoestand B als de trilling van beide slingers ten opzichte van het zwaartepunt.

De algemene oplossing van de vergelijkingen (62) is een lineaire combinatie van de normale trillingswijzen, dus

$x_1 = A_1\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + A_2\sin(\omega_2 t + \alpha_2)$ en (68)

$x_2 = A_1\sin(\omega_1 t + \alpha_1) - A_2\sin(\omega_2 t + \alpha_2)$ met integratie constanten (69)

A_1, A_2, α_1 en α_2.

x_1 en x_2 zijn op te vatten als het resultaat van de interferentie van twee harmonische bewegingen in dezelfde richting met verschillende frequenties en fasen, zie pag. 54 sub b.

We beschouwen nu het speciale geval dat $A_1 = A_2 = A$ en $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. (70)

Dan is $x_1 = A(\sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t) = 2A\cos\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t\sin\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t$ (71)

en $x_2 = A(\sin\omega_1 t - \sin\omega_2 t) = 2A\sin\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t\cos\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t$. (72)

De modulatie van x_1 is $2A\cos\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t$ en van x_2 is de modulatie

$2A\sin\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t = 2A\cos\{\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t - \frac{\pi}{2}\}$. (73)

Dit faseverschil van $\frac{\pi}{2}$ tussen de twee gemoduleerde amplitudes betekent fysisch dat er een periodieke uitwisseling van energie is tussen de beide oscillatoren.

De uitdrukkingen voor de kinetische energie E_k en de potentiële energie E_p zijn

$E_k = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2$. (74)

$E_p = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}f(x_1 - x_2)^2 = \frac{1}{2}(k+f)x_1^2 + \frac{1}{2}(k+f)x_2^2 - fx_1x_2$. (75)

De term fx_1x_2 stelt de zogenaamde wisselwerkingsenergie (koppelingsenergie) voor en beschrijft de uitwisseling van energie tussen de oscillatoren.

De totale energie van het systeem is nu te schrijven als

$$E_t = (E_p + E_k)_1 + (E_p + E_k)_2 + E_{p\,1,2}. \quad (76)$$

IV. MECHANICA VAN STARRE CONTINUA Lit.: AF 6;S 6, 7; B 8; F 18, 19, 20.

Bij een star lichaam blijven de afstanden tussen alle delen van het lichaam onder invloed van krachten of krachtmomenten constant. Voor elk tweetal punten A en B van het starre lichaam geldt dat

$|\vec{r}_A - \vec{r}_B|$ constant is in de tijd; het lichaam is onveranderlijk van vorm.

IV. A. Kinematica en Dynamica van Translatie

IV. A. 1. Plaatsbepaling

De positie van het starre lichaam wordt aangegeven door de plaatsvector van het zwaartepunt

$$\vec{r}_z = \frac{\int \vec{r}\, dm}{M} \quad \text{waarbij de integratie over het gehele lichaam} \qquad (1)$$

moet worden uitgevoerd. Als de materie waaruit het lichaam bestaat een soortelijke massa ρ heeft (die eventueel nog varieert met de plaats), dan zijn de (Cartesische) coördinaten van het zwaartepunt:

$$x_z = \frac{1}{M} \iiint x\rho(x,y,z)dxdydz \quad \text{met analoge uitdrukkingen voor} \qquad (2)$$

y_z en z_z.

De oriëntatie (stand) van het lichaam wordt bepaald door drie hoeken.

Kinematica

De positieverandering per seconde (translatie) van het lichaam wordt bepaald door de snelheid van het zwaartepunt $\vec{v}_z = \dot{\vec{r}}_z$.

De oriëntatieverandering per seconde (rotatie) wordt aangegeven door $\vec{\omega}$ die volgens de voortgaande beweging van een rechtse schroef gericht is langs de as waarom de (momentane) rotatie plaatsvindt. Daar infinitesimaal kleine draaiingen zich inderdaad als echte vectoren gedragen (dit in tegenstelling tot eindige draaiingen die niet commutatief zijn (Lit.: S 7.1, p. 231; B 2, p. 33; Hoofdstuk I.D. p. 8) is $\vec{\omega}$ een echte vector met commutativiteit ten aanzien van optelling.

De beweging van een star lichaam is dus volledig bepaald door $\vec{v}_z(t)$ en $\vec{\omega}(t)$.

Dynamica

Daar een star lichaam in principe te beschouwen is als een systeem

van afzonderlijke puntmassa's of massa-elementjes Δm zullen de in Hoofdstuk III afgeleide wetten ook gelden voor starre lichamen:

$M\ddot{\vec{r}}_z = \dot{\vec{P}} = \sum_i \vec{F}_i^e$ (3) ; $\vec{r}_z \times \dot{\vec{P}} = \dot{\vec{L}}$ (4) en $\dot{\vec{S}} = \vec{M}^{ez}$ (5)

(Zie Hoofdstuk III, p. 70).

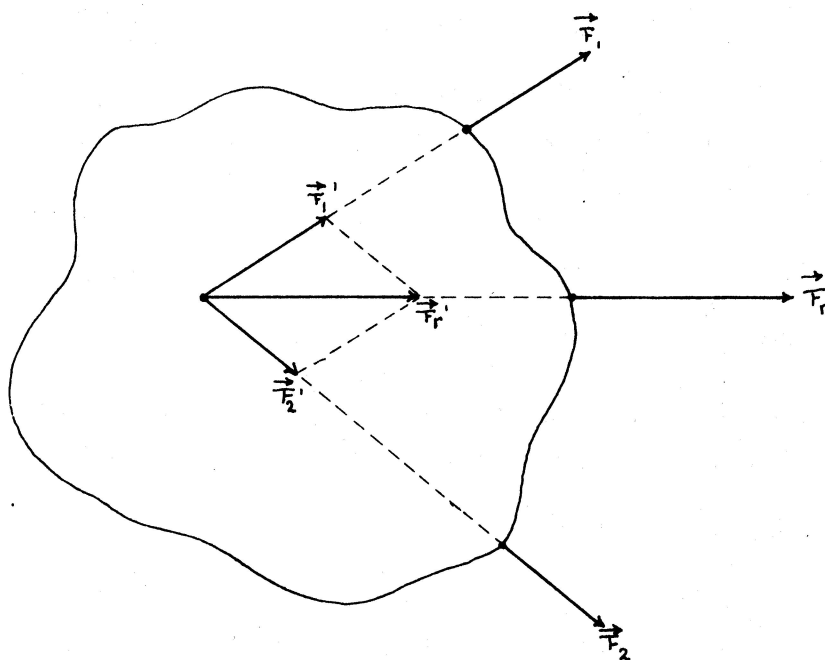
$\vec{F}_i^e$ en $\vec{M}^{ez}$ zijn uitwendige krachten en krachtmomenten, de inwendige krachten kunnen ook hier buiten beschouwing gelaten worden. In het vervolg laten we de letter e bij krachten en momenten weg.

De zwaartepuntsbeweging (trans.+rot.) en de draaibeweging om het zwaartepunt (rotatie) kunnen onafhankelijk van elkaar beschreven worden (separatie der bewegingen).

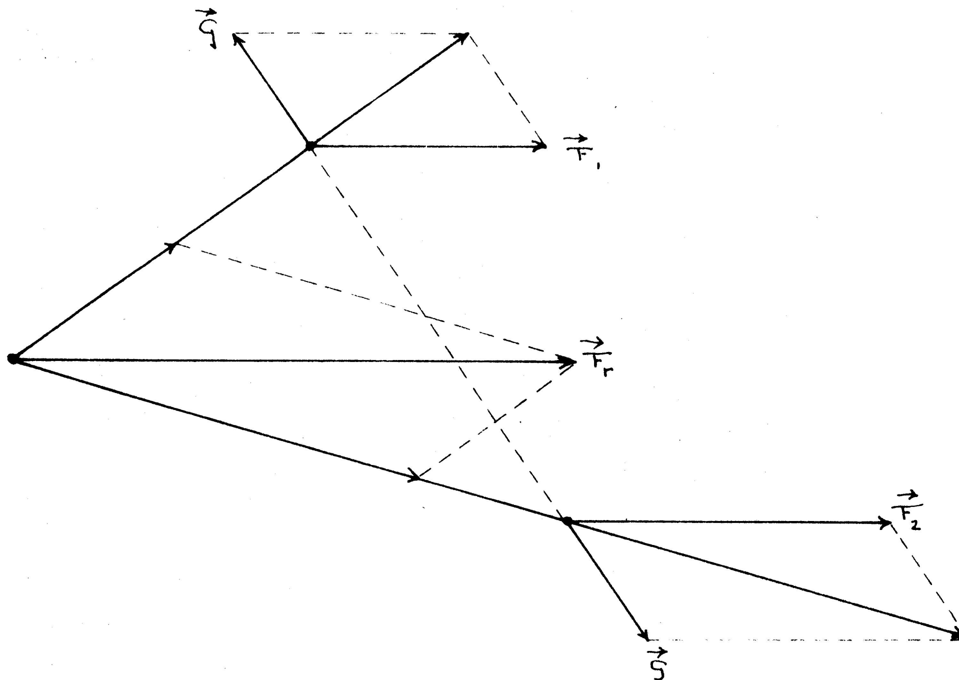
IV. A. 2. Samenstellen en ontbinden van krachten en koppels; statica

De bewegingen van een star lichaam worden bepaald door de resulterende kracht en het resulterend koppel. Verschillende krachtverdelingen met gelijke resultanten $\sum_i \vec{F}$ en $\sum_i \vec{M}_i$ zijn equivalent, dat wil zeggen dat ze het lichaam waarop ze werken dezelfde beweging geven.

Voor het samenstellen van krachten en koppels moet worden bedacht dat krachten glijdende vectoren zijn (zie Hoofdstuk III.B.4.), dat wil zeggen het aangrijpingspunt van een kracht langs de werklijn van de kracht mag worden verplaatst. De resultante $\vec{F}_r$ van twee krachten $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ wordt gevonden als in de figuur is aangegeven.



Als de krachten $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ evenwijdig zijn, kan de resultante worden gevonden door twee gelijke doch tegengesteld gerichte en langs dezelfde lijn werkende krachten $\vec{G}$ toe te voegen. Het is dan eenvoudig te bewijzen dat de resultante $\vec{F}_r$ gelijk is aan $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$, evenwijdig aan $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ is en een werklijn heeft waarvan de afstanden tot $\vec{F}_1$ en $\vec{F}_2$ zich omgekeerd als deze krachten verhouden (zie figuur).



Op deze wijze kunnen twee krachten in alle gevallen worden samengesteld tot één enkele kracht behalve als de beide krachten gelijk en evenwijdig doch tegengesteld gericht zijn en een verschillende werklijn hebben. In dat geval vormen de twee krachten een koppel. Koppels mogen worden vervangen door andere koppels die in hetzelfde of in een evenwijdig vlak werken mits het totale moment gelijk blijft. Een koppel veroorzaakt geen bewegingsverandering van het zwaartepunt daar $\sum_i \vec{F}_i = 0$ is.

Een koppel $\vec{K}_1$ en een kracht $\vec{F}$ die in hetzelfde vlak werken, kunnen worden vervangen door één enkele kracht. Het koppel $\vec{K}_1$ kan namelijk vervangen worden door een koppel $\vec{K}_2$ zodanig dat $\vec{K}_1 = \vec{K}_2$ en één der koppelkrachten van $\vec{K}_2$ juist gelijk en tegengesteld is aan de kracht $\vec{F}$. De resultante is dan de bijbehorende andere koppelkracht van $\vec{K}_2$. Omgekeerd kan ook een kracht evenwijdig verschoven worden mits een passend koppel wordt toegevoegd.

Een aantal op een lichaam werkende krachten en koppels kan vervangen worden door één resulterende kracht en één koppel. Het is mogelijk deze reductie zo uit te voeren dat de resulterende kracht loodrecht staat op het vlak waarin het koppel werkt. Het koppel kan ontbonden worden in een component $\perp \vec{F}$ en een component // $\vec{F}$. Door nu $\vec{F}$ evenwijdig te verplaatsen, kan de loodrechte component tot nul gereduceerd worden.

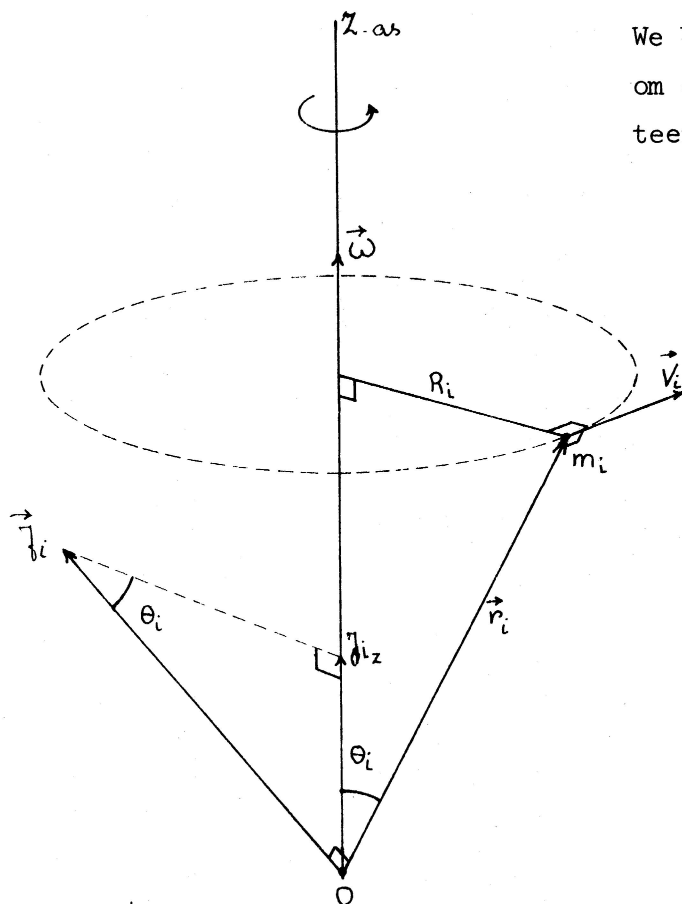
Statica

De noodzakelijke voorwaarden voor een star lichaam om in evenwicht te verkeren, zijn: $\boxed{\sum \vec{F}_i = 0}$ en $\boxed{\sum \vec{M}_i = 0}$ (6-7)

Hieruit kan direct of met behulp van het principe der virtuele verplaatsingen de evenwichtsstand worden bepaald.

IV. B. Rotatie om een Vaste As

IV. B. 1. Verband tussen hoeksnelheid, impulsmoment, traagheidsmoment en krachtmoment



We beschouwen een star lichaam dat om een as, die we Z-as noemen, roteert met hoeksnelheid $\vec{\omega}$.

Elk deelelementje m_i van dit lichaam beschrijft een cirkelvormige baan waarvan het middelpunt op de Z-as ligt (zie figuur); de snelheid van dit deeltje is $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$. (8)

Het impulsmoment $\vec{J}_i$ van het deeltje m_i ten opzichte van O is $\vec{J}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$ (9)

De component van $\vec{J}_i$ in de Z-richting is

$J_{i_z} = m_i r_i v_i \sin\theta_i = m_i R_i^2 \omega$ (10)

De z-component van het totale impulsmoment van het gehele lichaam is $J_z = \sum_i J_{i_z} =$

$= \omega \sum_i m_i R_i^2$ (11)

Het traagheidsmoment I ten opzichte van de beschouwde as is gedefinieerd als $\boxed{I \equiv \sum_i m_i R_i^2}$ (12)

Dus is $J_z = I.\omega$ (13)

Uit $\vec{M} = \dot{\vec{J}}$ volgt $M_z = \dot{J}_z = \frac{d}{dt} I\omega$ (14)

Als I onafhankelijk van de tijd is, wordt deze formule $M_z = I\dot{\omega}$, als het traagheidsmoment veranderlijk is, geldt $M_z = I\dot{\omega} + \dot{I}\omega$ (15)

Hier is alleen de z-component van het impulsmoment beschouwd.

Voor het totale impulsmoment J geldt: $\vec{J} = \sum_i \vec{J}_i$. (16)

Als het lichaam rotatiesymmetrisch om de Z-as is (dat is de rotatie-as), is de som van de componenten van $\vec{J}$, die loodrecht op de Z-as staan, gelijk 0.

In dat geval is $\vec{J} = \vec{k}J_z$ (17)

waarbij $\vec{k}$ de eenheidsvector in de Z-richting is.

Als het lichaam deze symmetrie niet heeft, valt de richting van $\vec{J}$ in het algemeen niet samen met de richting van $\vec{\omega}$ (Zie Hoofdstuk IV.C.).

Voor een lichaam dat om een symmetrie-as draait met hoeksnelheid $\vec{\omega}$ is dus $\vec{J} = I\vec{\omega}$. (18)

Differentiatie naar de tijd geeft $\dot{\vec{J}} = \frac{d}{dt}(I\vec{\omega})$.

Daar $\dot{\vec{J}} = \vec{M}$ is $\boxed{\vec{M} = \frac{d}{dt}(I\vec{\omega})}$ (19)

de bewegingsvergelijking voor rotatie.

Als op een symmetrisch star lichaam dat om zijn as roteert, geen uitwendig krachtmoment wordt uitgeoefend ($\vec{M} = 0$), is het impulsmoment constant en roteert het lichaam met constante hoeksnelheid $\vec{\omega}$.

Dit is de wet van behoud van impulsmoment die dus van toepassing is als het uitwendig krachtmoment nul is.

In het algemeen geldt voor een lichaam met constant traagheidsmoment

$\boxed{\vec{M} = I\dot{\vec{\omega}} = I\vec{\alpha}}$ (20)

Krachtmoment is traagheidsmoment maal hoekversnelling.

IV. B. 2. Berekening van het traagheidsmoment Lit.: S 6; AF 6.

Hiervoor wordt het lichaam in deeltjes m_i of in massa-elementjes $dm = \rho dV$ verdeeld.

Dan is $I = \sum_i m_i r_i^2$ of $I = \int \rho r^2 dV$ (21)

als r_i en r de afstand van het deeltje m_i of het massa-elementje dm tot de rotatie-as is.

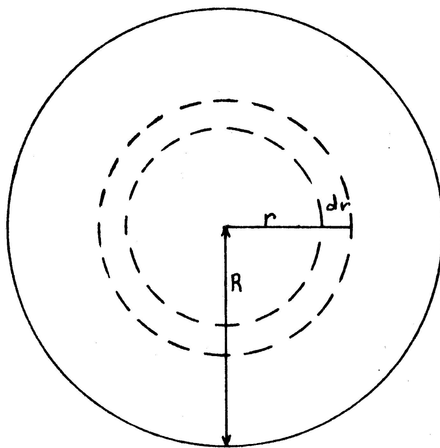
Als het lichaam homogeen is, dat wil zeggen dat ρ constant is voor alle delen ervan, kan I eenvoudig worden berekend uit $\rho \int r^2 dV$.

Voorbeeld: massieve cirkelcylinder die om zijn eigen as roteert.

$$I = \rho \int r^2 dV = \rho h \int_0^R r^2 2\pi r dr =$$

$$= \frac{\pi}{2} \rho R^4 h$$

$\pi R^2 \rho h = M$ is de massa van de cylinder dus is $I = \frac{1}{2} MR^2$.



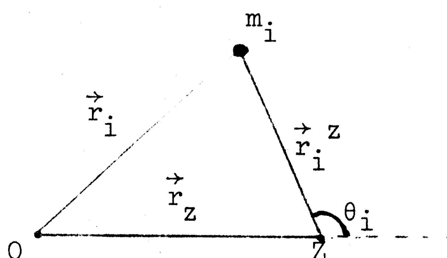
Zo kan op analoge wijze het traagheidsmoment voor lichamen van allerlei vormen worden berekend.

Voor een bol die om een as door het middelpunt roteert, is $I = \frac{2}{5} MR^2$ (M massa en R straal van de bol); voor een staaf ter lengte l en met massa M die roteert om een as door het midden van en loodrecht op de staaf is $I = \frac{1}{12} Ml^2$.

Als voor een lichaam met massa M dat om een bepaalde as draait het traagheidsmoment I is, is de gyratiestraal gedefinieerd als

$$k_g = \sqrt{\frac{I}{M}} \tag{22}$$

Als het traagheidsmoment van een lichaam met massa M ten opzichte van een as door het zwaartepunt I_z is, kan het traagheidsmoment ten opzichte van een andere evenwijdige as op afstand a berekend worden met de regel van Steiner $\boxed{I = I_z + Ma^2}$



Stel het deeltje m_i is een massapunt van een lichaam met zwaartepunt Z. Dit lichaam roteert om een as door O ⊥ vlak van tekening.

Het traagheidsmoment van m_i ten opzichte van de as door O is nu als volgt te schrijven:

$$I_i = m_i r_i^2 = m_i (\vec{r}_z + \vec{r}_i^{\,z})^2 = m_i r_z^2 + m_i r_i^{z2} + 2 m_i r_z r_i^z \cos\theta_i \;. \tag{23}$$

Gesommeerd over het hele lichaam wordt dit

$$I = \sum I_i = r_z^2 \sum m_i + \sum m_i r_i^{z2} + 2r_z \sum m_i r_i^z \cos\theta_i \qquad (24)$$

Noem $r_z = a$ en $\sum m_i = M$.

$\sum m_i r_i^z \cos\theta_i = 0$ vanwege de definitie van zwaartepunt.

$\sum m_i r_i^{z2} = I_z$. Dus is $\boxed{I = I_z + Ma^2}$. (25)

Lit.: S 6.8, p. 195; AF 6.3.

IV. B. 3. Energie van rotatie

De kinetische energie van een lichaam dat om een vaste as roteert, is

$$E_k = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i |\vec{\omega} \times \vec{r}_i|^2 = \tfrac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i R_i^2 \qquad (26)$$

waarbij R_i de lengte van de loodlijn is vanuit het deeltje m_i op de rotatie-as, $\sum_i m_i R_i^2 = I$ het traagheidsmoment, dus $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$ (27)

Deze uitdrukking geldt voor alle rotaties, ongeacht de draaias omdat ω voor alle deelelementjes hetzelfde is. Als ook formule (18) van toepassing is, kan in plaats van (27) ook geschreven worden

$$E_k = \frac{J^2}{2I} \qquad (28)$$

Als een lichaam zowel in translatie als in rotatiebeweging is, kan formule (III.17) worden gebruikt $E_k = E_k^z + \frac{1}{2} M v_z^2$. (29)

Daar de beweging ten opzichte van het zwaartepunt van een star lichaam alleen maar rotatie kan zijn, is in dat geval E_k^z de kinetische energie van rotatie E_{kr} en $\frac{1}{2} M v_z^2$ die van translatie E_{kt}; dus $E = E_{kr} + E_{kt}$ (30)

De arbeid die onder invloed van een krachtmoment $\vec{M}$ wordt verricht bij draaiing van een hoek θ_1 naar θ_2 is

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{M} . d\vec{\theta} \qquad (31)$$

Analoog aan een vroegere definitie wordt hier de potentiële energie gedefinieerd als $E_{pr} = \int_{\theta}^{\theta_0} \vec{M} . d\vec{\theta}$ (zie verg. (17) pag. 46) (32)

$\vec{M} = I\dot{\vec{\omega}}$. Vermenigvuldiging van beide leden met $d\vec{\theta}$ en integratie over de afgelegde hoek geeft: (33)

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{M}.d\vec{\theta} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} I\dot{\vec{\omega}}.d\vec{\theta} = \int_{t_1}^{t_2} I\dot{\vec{\omega}} . \frac{d\vec{\theta}}{dt}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} I\dot{\vec{\omega}}.\vec{\omega}dt = \int_{\vec{\omega}_1}^{\vec{\omega}_2} I\vec{\omega}.d\vec{\omega} =$$

$$= \tfrac{1}{2}I\omega_2^{\,2} - \tfrac{1}{2}I\omega_1^{\,2}. \qquad (34)$$

Volgens definitie is $\int_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{M}.d\vec{\theta} = \int_{\theta_1}^{\theta_0} \vec{M}.d\vec{\theta} + \int_{\theta_0}^{\theta_2} \vec{M}.d\vec{\theta} = E_{pr}(\theta_1) - E_{pr}(\theta_2).$ (35)

Dus is $E_{pr}(\theta_1) + \tfrac{1}{2}I\omega_1^{\,2} = E_{pr}(\theta_2) + \tfrac{1}{2}I\omega_2^{\,2}$. (36)

Dit is de wet van behoud van mechanische energie (kinetische + potentiële) voor een zuivere rotatie die dus alleen maar geldt voor een conservatief systeem.

Voor bewegingen met gecombineerde translatie en rotatie geldt ook de wet van behoud van totale mechanische energie, ook in die gevallen waarbij translatie in rotatie wordt omgezet of omgekeerd.

$E_{kt} + E_{pt} + E_{kr} + E_{pr} = C.$ (37)

Uiteraard geldt ook hier de voorwaarde dat alle krachten conservatief moeten zijn.

IV. B. 4. Analogie tussen translatie en rotatie

De formules voor translatie en rotatie vertonen een opmerkelijke overeenkomst die voor het inzicht zowel als de memorisatie van grote betekenis is.

In de volgende tabel is de gelijkvormigheid van de formules voor eenvoudige gevallen aangegeven.

Translatie	Rotatie
Positie, plaats $\vec{r}$	Oriëntatie, hoekstand θ
Snelheid $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$	Hoeksnelheid $\vec{\omega} = \dot{\theta}$
Versnelling $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$	Hoekversnelling $\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\vec{\theta}}$
Massa m	Traagheidsmoment I
Kracht $\vec{F}$	Krachtmoment $\vec{M}$
Arbeid $\int \vec{F}.d\vec{r}$	Arbeid $\int \vec{M}.d\vec{\theta}$
Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$	Impulsmoment $\vec{J} = I\vec{\omega}$
Kinetische energie $E_{kt} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$	Kinetische energie $E_{kr} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{J^2}{2I}$
Potentiële energie $E_{pt} = \int_r^{r_0} \vec{F}.d\vec{r}$	Potentiële energie $E_{pr} = \int_\theta^{\theta_0} \vec{M}.d\vec{\theta}$

IV. B. 5. Harmonische rotator

De behandeling van de harmonische rotator is verregaand analoog aan die van de harmonische oscillator. Bij een harmonische rotator werkt een terugdrijvend krachtmoment τ dat evenredig is met de uitwijkingshoek θ:

$\tau = -D\theta$ D is het richtkoppel (Engels: torque constant) (38)

$\tau = I\ddot{\theta}$ dus $I\ddot{\theta} + D\theta = 0$ (39)

Oplossing $\theta = \theta_0\cos(\omega_0 t + \phi)$ met $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{I}}$ (40)

Passen we deze behandeling toe op de mathematische slinger (zie pag. 56) dan krijgen we de volgende formules:

$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$. Vermenigvuldigen met l (41)

$ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta$. Voor kleine hoeken is $\sin\theta \approx \theta$ dus is (42)

bij benadering $ml^2\ddot{\theta} = -mgl\theta = -D\theta$ met $mgl = D$. (43)

Het traagheidsmoment van m ten opzichte van een as door 0 is

$I = ml^2$ dus is $I\ddot{\theta} = -D\theta$ (44), de differentiaalvergelijking (44)

voor de harmonische rotator.

Met een wrijvingskracht met moment $\tau_\omega = -B\dot{\theta}$ wordt de differentiaalvergelijking van de vrije gedempte harmonische rotator

$I\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + D\theta = 0$ (45)

Drie gevallen:

1) De overaperiodieke (overgedempte) rotator: $B > \sqrt{4DI}$

$$\theta = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}; \quad p_{1,2} = -\frac{B}{2I} \pm \left(\frac{B^2}{4I^2} - \frac{D}{I}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{46}$$

2) De aperiodiek gedempte rotator: $B = \sqrt{4DI}$

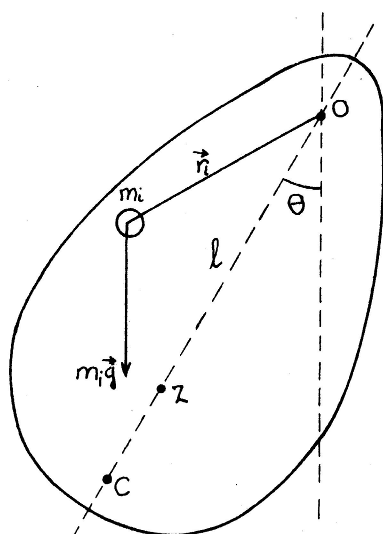
$$\theta = A_1 e^{-\frac{B}{2I}t}(1 + A_2 t), \text{ dit is het geval van kritieke demping} \tag{47}$$

3) De periodieke rotator: $B < \sqrt{4DI}$

$$\theta = A_1 e^{-\frac{B}{2I}t} \cos\left(\sqrt{\frac{D}{I} - \frac{B^2}{4I^2}}\,t - A_2\right) \tag{48}$$

Voorbeelden van de harmonische rotator:
spoeltje van een galvanometer, fysische slinger.

De fysische slinger. Lit.: S 6.16; AF 8.6.



Draaipunt O, zwaartepunt Z. Lengte OZ = l.

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{g} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{g} =$$
$$= M\vec{r}_z \times \vec{g} \tag{49}$$

$\vec{M}$ is evenwijdig aan de draaiingsas, staat dus $\perp$ vlak van tekening.

$|\vec{M}| = -Mgl\sin\theta$. Verwaarlozing van wrijving. Kleine uitwijkingshoek, dus $\sin\theta \approx \theta$ dan is

$$|\vec{M}| = I\ddot{\theta} = -Mgl\theta \, . \tag{50}$$

Richtkoppel Mgl; $\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \phi)$ $\quad \omega_0 = \sqrt{\frac{Mgl}{I}}$ (51)

Vergelijking met mathematische (punt)slinger $\omega_0' = \sqrt{\frac{g}{l_0}}$

De equivalente slingerlengte van de fysische slinger is $l_0 = \frac{I}{Ml}$ (52)

Stel OC = l_0, dan is CZ = $l_0 - l = \frac{I}{Ml} - l$. (53)

Daar volgens de stelling van Steiner $I = I_z + Ml^2$ is $CZ = \frac{I_z}{Ml}$ (54)

Het punt C wordt oscillatiecentrum genoemd. O en C zijn bij elkaar behorende punten, dat wil zeggen als het ene punt draaipunt is, fungeert het andere punt als oscillatiecentrum en omgekeerd. Het oscillatiecentrum is identiek met het zogenaamde percussiecentrum. Dit is een punt dat met het draaipunt in een zodanige relatie staat dat als een krachtstoot op het lichaam in het ene punt wordt uitgeoefend, er in eerste instantie geen reactiekrachtstoot op, of impulsverandering in het andere punt optreedt. Lit.: S 6.19.

IV. C. Rotatie om een Veranderlijke As   Lit.: S 7.5 t/m 7.11; B 8; F 20.

IV. C. 1. Traagheidstensor, vergelijkingen van Euler

In de tot nu toe behandelde zogenaamde vlakke dynamica ondergaan de punten van een lichaam verplaatsingen in een plat vlak. De ruimtelijke, drie dimensionale beweging is veel ingewikkelder. De moeilijkheden treden op doordat $\vec{J}$ en $\vec{\omega}$ niet meer evenwijdig zijn wat ze in de vlakke dynamica wel zijn.

Bij de rotatie van een star lichaam om een vast punt bestaat in het algemeen geen eenvoudig verband tussen het impulsmoment $\vec{J}$ en de hoeksnelheid $\vec{\omega}$. Het zijn vectoren die verschillende richting hebben en in plaats van het eenvoudige verband $\vec{J} = I\vec{\omega}$ (1)

waarin het traagheidsmoment een scalair is, krijgen we nu te maken met de zogenaamde traagheidstensor ι, in de uitdrukking $\vec{J} = \iota\vec{\omega}$. (2)

Bij deze beschouwing laten we de translatiebeweging van het zwaartepunt buiten beschouwing. Alle te gebruiken vectoren zijn dan ook gedefinieerd in het zwaartepuntstelsel met ten opzichte van de vaste sterren constante richtingen.

Het totale impulsmoment $\vec{J}$ van het roterende lichaam dat in massaelementjes m_i verdeeld is, kan volgens de definitie van $\vec{J}$ geschreven worden als

$$\vec{J} = \sum_i m_i\vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i m_i\vec{r}_i \times (\vec{\omega}\times\vec{r}_i) \tag{3}$$

Met behulp van de componentenuitdrukkingen $\vec{r}_i = \vec{i}x_i + \vec{j}y_i + \vec{k}z_i$ en $\vec{\omega} = \vec{i}\omega_x + \vec{j}\omega_y + \vec{k}\omega_z$ en formule (29a,p.13) voor het vectorprodukt wordt dit

$$\begin{aligned}\vec{J} = {} & \vec{i}\{\omega_x \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum_i m_ix_iy_i - \omega_z \sum_i m_ix_iz_i\} + \\ & + \vec{j}\{\omega_y \sum_i m_i(z_i^2 + x_i^2) - \omega_z \sum_i m_iy_iz_i - \omega_x \sum_i m_iy_ix_i\} + \\ & + \vec{k}\{\omega_z \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2) - \omega_x \sum_i m_iz_ix_i - \omega_y \sum_i m_iz_iy_i\}\end{aligned} \tag{4}$$

Let wel dit zijn de componenten van $\vec{r}_i$, $\vec{\omega}$ en $\vec{J}$ in een willekeurig assenstelsel waarvan de oorsprong het zwaartepunt van het lichaam is.

Deze uitdrukking voor $\vec{J}$ wordt nu verkort geschreven als het produkt van een matrix en een vector $\vec{\omega}$

$$\begin{vmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{vmatrix} = \sum_i m_i \begin{vmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & x_i^2 + y_i^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{vmatrix} \qquad (5)$$

De matrix met 9 elementen wordt <u>traagheidstensor</u> ι genoemd en de elementen worden als volgt aangeduid

$$\begin{vmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{vmatrix} = \iota \qquad (6)$$

waarbij $I_{xx} = \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2)$, I_{yy} en I_{zz} (in het vervolg kortheidshalve met I_x, I_y en I_z aangeduid) de <u>traagheidsmomenten</u> (Engels: moments of inertia) zijn en de andere grootheden met gecombineerde indices de <u>deviatiemomenten</u> (Engels: products of inertia).
De traagheidstensor is symmetrisch ten opzichte van één diagonaal, $\vec{J}$ en $\vec{\omega}$ zijn onafhankelijk van de keuze van het assenstelsel.
De grootheid ι voegt aan de vector $\vec{\omega}$ eenduidig een andere (en anders gerichte) vector $\vec{J}$ toe; anders uitgedrukt: ι is een operator die de vector $\vec{\omega}$ transformeert in een vector $\vec{J}$. Zo'n grootheid wordt tensor genoemd en ι is de traagheidstensor. Dus is $\vec{J} = \iota\vec{\omega}$ (7)
Nu kan worden aangetoond dat elk star lichaam minstens drie onderling loodrechte assen heeft zodanig dat de deviatiemomenten ten opzichte van deze assen alle nul zijn.
Dit zijn de zogenaamde <u>hoofdtraagheidsassen</u> en de traagheidsmomenten ten opzichte van deze assen worden <u>hoofdtraagheidsmomenten</u> genoemd.

Als de hoofdtraagheidsassen als coördinaatassen gebruikt worden, wordt de uitdrukking voor het impulsmoment

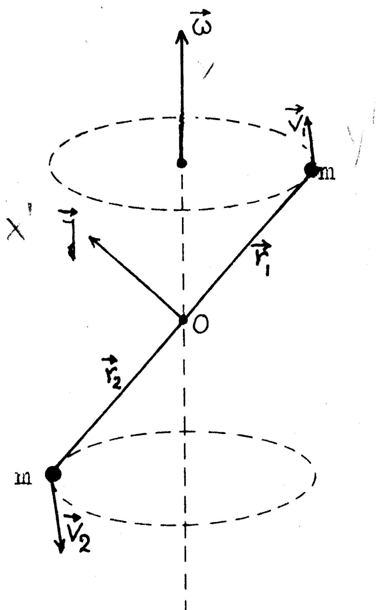
$$\begin{vmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{vmatrix} \qquad (8)$$

De traagheidstensor is dan zoals men dat pleegt uit te drukken "op hoofdassen getransformeerd" of "gediagonaliseerd".

In dat geval kan het verband tussen $\vec{J}$ en $\vec{\omega}$ in eenvoudige vectorvorm worden geschreven $\vec{J} = \vec{i}I_x\omega_x + \vec{j}I_y\omega_y + \vec{k}I_z\omega_z$ (9)

Als het starre lichaam rotatiesymmetrie heeft, zijn er oneindig veel hoofdtraagheidsassen. De fysische betekenis van hoofdtraagheidsassen is dat ze gelijkwaardig zijn aan vrije assen, omdat bij rotatie om zo'n as $\vec{J}$ constant blijft bij eenparige rotatie zodat er geen krachtmoment nodig is om deze rotatie te onderhouden, het kenmerk van een vrije as.

Algemeen kan worden aangetoond dat elk lichaam om de hoofdtraagheidsas van zijn grootste traagheidsmoment en om die van zijn kleinste traagheidsmoment een stabiele vrije rotatie kan uitvoeren, terwijl om de derde hoofdtraagheidsas wel een vrije maar geen stabiele rotatie kan worden uitgevoerd. Bij symmetrische lichamen kunnen bijzondere gevallen optreden. Het drietal hoofdtraagheidsassen is dan niet eenduidig bepaald. Bij een bol kan elke lijn door het middelpunt als hoofdtraagheidsas fungeren zodat daar een stabiele rotatie om elke middellijn mogelijk is. Voor lichamen met één as van rotatiesymmetrie is deze as òf de as van het grootste òf die van het kleinste hoofdtraagheidsmoment. Dit kan worden geïllustreerd aan het voorbeeld van de halter: twee uitgebreide gelijke massa's m die door een staaf zijn verbonden



en roteren om de "as" $\vec{\omega}$. De zwaartekracht wordt buiten beschouwing gelaten, evenals de massa van de staaf.
De halter kan zich in deze gegeven rotatietoestand zonder uitwendige invloeden niet handhaven.
$|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = a; \qquad \vec{r}_1 = -\vec{r}_2$
Het totale impulsmoment is $\vec{J} = \vec{r}_1 \times m\vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m\vec{v}_2; \qquad |\vec{J}| = 2mav$
$\vec{J}$ staat loodrecht op de as van de halter en heeft dus een andere richting dan $\vec{\omega}$. Bij rotatie om de richting $\vec{\omega}$ verandert $\vec{J}$ dus voortdurend van richting en om de halter in deze oriëntatie om $\vec{\omega}$ te laten draaien, zou er een steeds van richting wisselend krachtmoment $\vec{\tau}$ (bijvoorbeeld door een lager in O) moeten worden uitgeoefend.
Het is dus geen vrije rotatie. Een stabiele vrije rotatie is alleen mogelijk als de halteras loodrecht op $\vec{\omega}$ staat of er mee samenvalt, want slechts in deze beide gevallen heeft $\vec{J}$ dezelfde richting als $\vec{\omega}$.
Als de halteras met $\vec{\omega}$ samenvalt, is $\vec{J}$ (voor puntmassa's m zou $\vec{J} = 0$ zijn) minimaal, als die as $\perp \vec{\omega}$ staat, is $\vec{J}$ maximaal.

De kinetische energie van rotatie is

$$E_k = \tfrac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} = \tfrac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \qquad (10)$$

Bij gebruik van hoofdtraagheidsassen, hoofdtraagheidsmomenten en componenten van $\vec{\omega}$ in het hoofdassenstelsel wordt de uitdrukking voor E_k:

$$E_k = \tfrac{1}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2) \qquad (11)$$

en als de componenten van $\vec{J}$ langs deze assen J_x, J_y en J_z zijn, kan geschreven worden

$$E_k = \tfrac{1}{2}\left(\frac{J_x^2}{I_x} + \frac{J_y^2}{I_y} + \frac{J_z^2}{I_z}\right) \qquad (12)$$

Het doel van de dynamica van rotaties is het formuleren van een verband tussen het krachtmoment en hoeksnelheid en hoekversnelling en het oplossen van deze bewegingsvergelijking. We gaan uit van een coordinatenstelsel waarvan de assen samenvallen met de hoofdtraagheidsassen van het lichaam. Deze assen roteren dan met het lichaam mee en de hoofdtraagheidsmomenten ten opzichte van deze assen blijven constant.
Differentiatie van $\vec{J}$ (29a) en substitutie in $\vec{M} = \dot{\vec{J}}$ (6) geeft

$$\vec{M} = \vec{i}I_x\dot{\omega}_x + I_x\omega_x\dot{\vec{i}} + \vec{j}I_y\dot{\omega}_y + I_y\omega_y\dot{\vec{j}} + \vec{k}I_z\dot{\omega}_z + I_z\omega_z\dot{\vec{k}} \qquad (13)$$

$\dot{\vec{J}} = \vec{k}$ 2 m [illegible]

Nu is

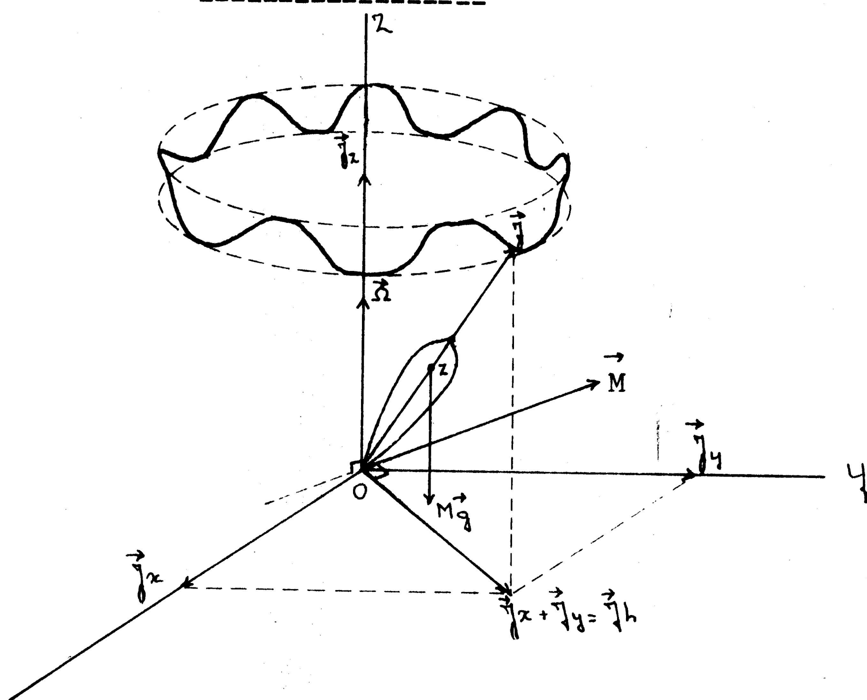
$\dot{\vec{i}} = \vec{\omega} \times \vec{i} = (\vec{i}\omega_x + \vec{j}\omega_y + \vec{k}\omega_z) \times \vec{i} = \vec{j}\omega_z - \vec{k}\omega_y$ met analoge uitdrukkingen voor $\dot{\vec{j}}$ en $\dot{\vec{k}}$. (14)

Dan is het resultaat

$$M_x = \dot{J}_x = I_x\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z(I_z - I_y)$$
$$M_y = \dot{J}_y = I_y\dot{\omega}_y + \omega_z\omega_x(I_x - I_z) \qquad (15)$$
$$M_z = \dot{J}_z = I_z\dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y(I_y - I_x)$$

Dit zijn de vergelijkingen (in componentvorm) van Euler.

IV. C. 2. Precessie, nutatie

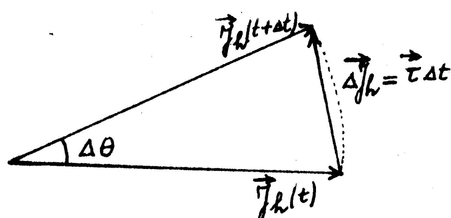


We beschouwen een snel draaiende tol die niet in zijn zwaartepunt Z, maar in het punt O wordt ondersteund.

$\vec{J} = \vec{i}J_x + \vec{j}J_y + \vec{k}J_z = \vec{J}_h + \vec{J}_z$. Het krachtmoment $\vec{M} = \vec{r}_z \times M\vec{g}$ staat loodrecht op het vlak door $\vec{J}$ en $\vec{J}_z$. Daar $\vec{M}$ in een horizontaal vlak werkt, is $\dot{\vec{J}}_z = 0$.

$\vec{M} \perp \vec{J}_h$ en $\vec{M} = \dot{\vec{J}}_h$; dus is $(\vec{J}_h.\dot{\vec{J}}_h) = 0$ dus $\frac{d}{dt}(\vec{J}_h.\vec{J}_h) = 0$, dus

$|\vec{J}_h|$ is constant maar $\vec{J}_h$ verandert van richting.



De verandering van de richting van $\vec{J}_h$ per seconde is

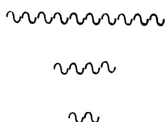
$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{M}{J_h}$. Dit is de hoeksnelheid Ω van de precessiebeweging. In vectorvorm $\vec{\Omega} \times \vec{J} = \vec{M}$ (16)

Daar $\vec{M} = \dot{\vec{J}}$ is $\dot{\vec{J}} = \vec{\Omega} \times \vec{J}$. Dit is de (17)

algemene uitdrukking voor de tijdafgeleide van een vector die qua grootte constant is.

De tol voert een precessiebeweging uit (precedeert) waarbij zijn lichaamsas roteert om de Z-as. Dit is slechts een benadering van de werkelijkheid daar de werkelijke hoeksnelheid $\vec{\omega} + \vec{\Omega}$ is en de richting van het impulsmoment $\vec{J}$ hier niet mee samenvalt. De benadering is goed als $\omega >> \Omega$ dus voor relatief lage precessiefrequenties. Een exacte behandeling toont aan dat de hoek tussen $\vec{J}$ en $\vec{\Omega}$ in het algemeen niet constant is maar tussen twee waarden oscilleert: het eindpunt van de vector $\vec{J}$ beschrijft een slingerlijn zoals in de figuur is aangegeven. Deze oscillatiebeweging wordt <u>nutatie</u> genoemd. Lit.: S 7.8 t/m 7.11.

Voorbeelden van precessie: de Larmor precessie.
Precessie en nutatie van de aardas om de normaal op de ecliptica.



V. DE WETTEN VAN NEWTON EN COULOMB

Lit.: AF 9 ; S 4; F 7; B 9.

V.A. Overeenkomsten en Verschillen

In de fysica wordt de wisselwerking (interactie) tussen deeltjes bestudeerd. De deeltjes hebben eigenschappen zoals massa en lading. Zoals in § II.B.1 is uiteengezet, kunnen we deze wisselwerking interpreteren als krachten die op de deeltjes werken en kan worden gesproken van een krachtveld dat wordt teweeggebracht door de eigenschappen der deeltjes. Zo veroorzaken de massa's van deeltjes een gravitatieveld, de ladingen van stilstaande deeltjes een elektrostatisch veld, bewegende geladen deeltjes een elektromagnetisch veld.

Er worden tegenwoordig vier verschillende soorten interactie onderscheiden:

1. Sterke wisselwerking (mesonen, baryonen).
2. Zwakke wisselwerking (neutron → elektron, neutrino).
3. Elektrostatische en elektromagnetische interactie (elektrische ladingen, fotonen).
4. Gravitatiewisselwerking (aantrekkingskracht tussen massa's: Newton).

De interactie tussen baryonen en mesonen is van de orde van grootte 100× sterker dan de elektrostatische interactie tussen deze deeltjes en heet daarom sterke interactie. De interactie tussen elektronen en neutrino's, die een rol speelt bij de β-radioactiviteit van sommige atoomkernen, is ongeveer een factor 10^5 zwakker en heet daarom zwakke interactie. De sterke- en zwakke interacties hebben een zeer kleine werkingssfeer (ca. 10^{-15} m) en treden op bij nucleaire processen. De aard van deze interacties is nog niet erg duidelijk en de mathematisch fysische beschrijving ervan vormt een van de grootste problemen van de hedendaagse kernfysica en fysica van elementaire deeltjes.

De elektrostatische en elektromagnetische interactie (Coulomb, Lorentz, Maxwell, Faraday, Ampère) is een tamelijk sterke interactie die mathematisch fysisch vrijwel volmaakt te beschrijven is.

Gravitatie is, vergeleken met de andere drie soorten interactie, een zeer zwakke interactie die zich slechts dan duidelijk manifesteert als we met zeer grote massa's te maken hebben. Deze "oudst bekende" interactie is noch in zijn structuur (dat wil zeggen in verband met de ruimte-tijd geometrie: de algemene relativiteitstheorie) noch in zijn al of niet kwanteuze karakter (gravitonen!) voldoende doorgrond. De elektrostatische wisselwerking tussen twee rustende puntladingen (Coulomb) en de gravitatiewisselwerking tussen twee rustende puntmassa's (Newton) vertonen -- als krachtwetten geformuleerd -- sterke overeenkomst:

de wet van Coulomb: $\boxed{\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{12} = - \vec{F}_{21}}$ (1)

de wet van Newton: $\boxed{\vec{F}_{12} = - G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{e}_{12} = - \vec{F}_{21}}$ (2)

r_{12} is de afstand tussen de deeltjes,

$\vec{e}_{12}$ is de eenheidsvector in de richting $2 \rightarrow 1$: $\vec{e}_{12} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$, (3)

$\vec{F}_{12}$ is de kracht die deeltje 1 ondervindt van deeltje 2,

$\vec{F}_{21}$ is de kracht die deeltje 2 ondervindt van deeltje 1,

q_1 en q_2 zijn de ladingen en m_1 en m_2 de massa's van respectievelijk deeltje 1 en 2.

De evenredigheidsconstanten zijn

$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \ \mathrm{Nm^2C^{-2}}$ en $G = 6{,}670 \cdot 10^{-11} \ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}$.

De overeenkomsten tussen de wetten zijn:

1) de krachten werken in de richting van de verbindingslijn der deeltjes, immers $\vec{F} = \pm f(r)\, \vec{e}_{12}$; de krachten zijn centraal;
2) de krachten zijn omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand tussen de deeltjes, het zijn zogenaamde $\frac{1}{r^2}$ wetten, immers $F \sim \frac{1}{r^2}$;
3) de krachten zijn evenredig met de ladingen respectievelijk massa's der deeltjes.

De verschillen tussen de wetten zijn:

1) De oorsprong van de elektrostatische- en gravitatiekrachten uitgedrukt door lading, respectievelijk massa, is fundamenteel verschillend en er is tot dusver geen verband gevonden. Dit verschil in aard komt tot uiting bij een lading die een constante snelheid $\vec{v}$ heeft: in het met de lading meebewegende stelsel meet men alleen een elektrostatisch veld, in het rustende stelsel wordt bovendien een magneetveld gemeten omdat in dit stelsel de lading zich als stroom manifesteert. (Zie College Relativistische Beginselen, Dr. Hooyman).
Een dergelijk verband met andere velden kent men niet voor het gravitatieveld.

2) De verhouding van de krachten F_{el} en F_{gr} die twee elektronen op elkaar uitoefenen, is

$$\frac{F_{el}}{F_{gr}} = - \left(\frac{q}{m}\right)^2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 G} \approx 10^{42} \qquad (4)$$

De elektrostatische interactie is dus zeer veel sterker dan de gravitatie interactie die, zoals vermeld, een uitgesproken zwakke interactie is.

3) We kennen wel positieve en negatieve elektrische lading maar het begrip negatieve massa is tot dusver onbekend.

4) De gravitatiekracht is altijd aantrekkend, de Coulombkracht tussen ladingen van hetzelfde teken afstotend, tussen ladingen van tegengesteld teken aantrekkend.

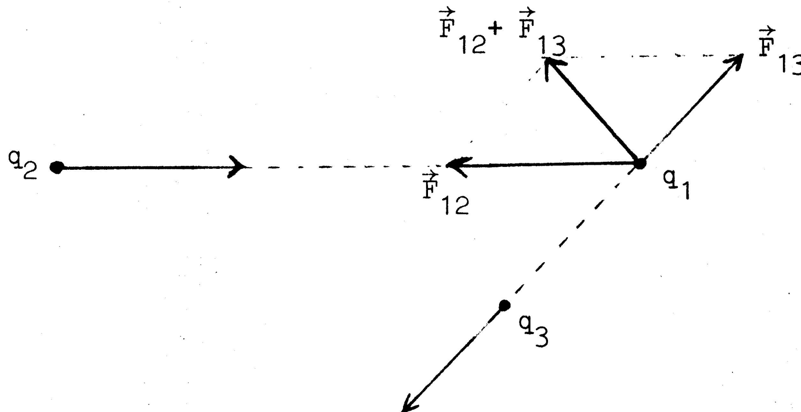
V.B. Het Superpositie Principe

Experimenteel is gebleken dat bij de interactie tussen meer dan twee deeltjes de krachten tussen de paren deeltjes elkaar niet beinvloeden: het superpositie principe voor krachten, zie pag. 35 van dit dictaat. Dit geldt voor beide typen krachten. Volgens dit principe is de kracht die op deeltje 1 werkt tengevolge van de wisselwerking met de andere deeltjes

$$\vec{F}_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j\neq 1} \frac{q_j}{r_{1j}^2} \cdot \vec{e}_{1j} \qquad \text{en} \qquad (5)$$

$$\vec{F}_1 = - Gm_1 \sum_{j\neq 1} \frac{m_j}{r_{1j}^2} \cdot \vec{e}_{1j} \, , \qquad (6)$$

voor respectievelijk ladings- en massaverdelingen.



V.C. Velden

We geven hier de formulering voor het elektrostatische veld. Door de substitutie

$$\boxed{\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0} \rightarrow - G\, m_1 m_2} \qquad (7)$$

worden de formules voor het gravitatieveld verkregen.
De elektrische (gravitatie) veldsterkte in een bepaald punt is de kracht die werkt op een positieve eenheidslading (eenheidsmassa) in dat punt. Wordt in een punt met plaatsvector $\vec{r}$, waar de elektrische veldsterkte $\vec{E}(\vec{r})$ is, een lading q geplaatst, dan werkt op deze lading de kracht $\vec{F} = q\vec{E}$. (8)

Als het elektrische veld veroorzaakt wordt door een aantal puntladingen q_j op verschillende plaatsen $\vec{r}_j$ (j loopt van 1 naar N), krijgen we de uitdrukking voor de veldsterkte $\vec{E}(\vec{r})$ door de bijdragen van alle ladingen vectorieel te sommeren:

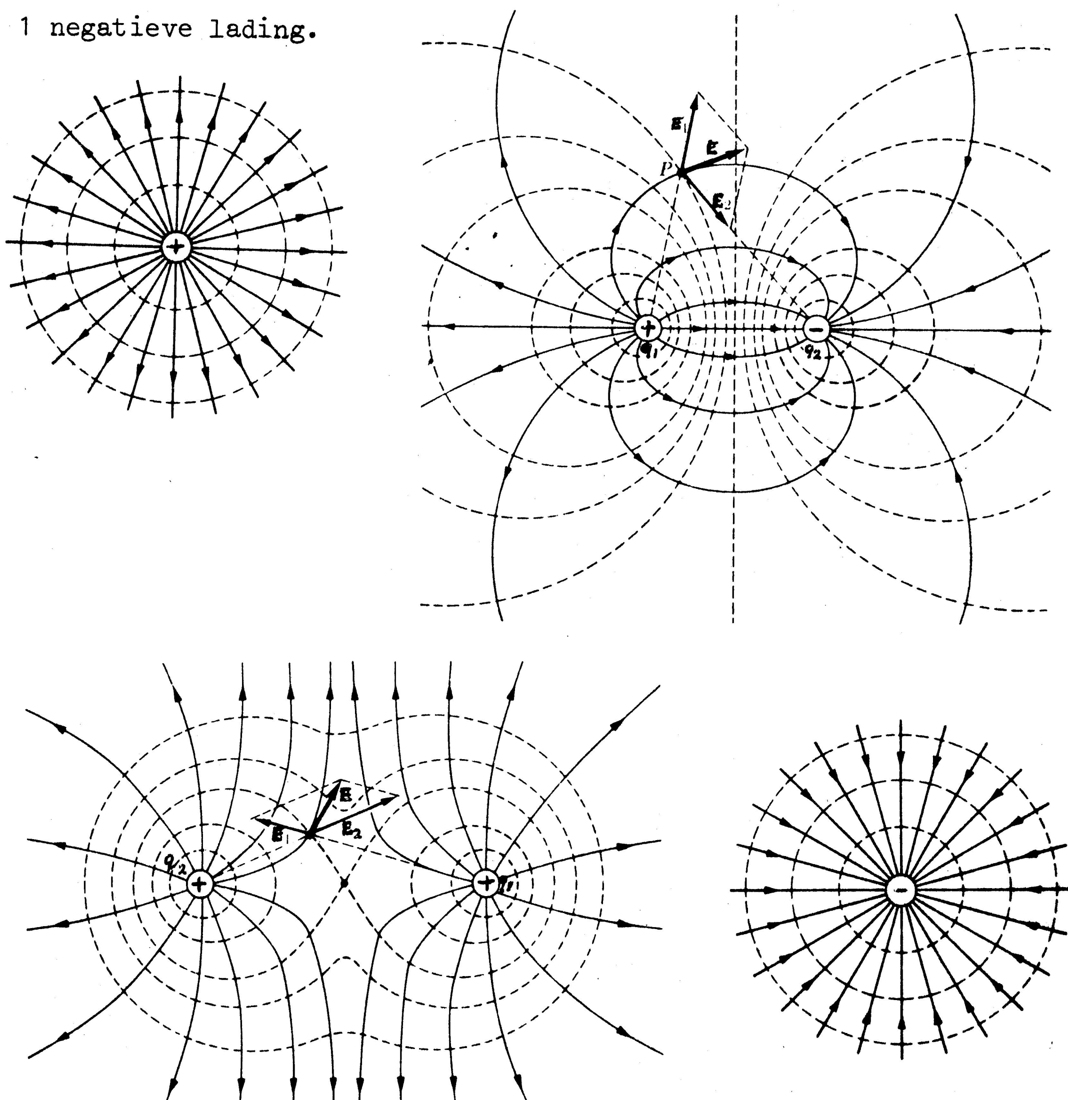
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}|^2} \vec{e}_j \, , \qquad (9)$$

waarbij $\vec{e}_j$ een eenheidsvector is die wijst in de richting van de puntlading j naar het punt met plaatsvector $\vec{r}$.

Het veld van een lading q in de oorsprong is dus

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \vec{e}_r} . \qquad (10)$$

Het veld $\vec{E}$ kan aanschouwelijk worden gemaakt door bij de gegeven ladingsverdeling zogenaamde veldlijnen te tekenen; dit zijn lijnen die in elk punt de richting van de veldsterkte aangeven. In de figuren zijn veldlijnen getekend voor respectievelijk 1 positieve lading, 1 positieve en 1 negatieve lading, 2 positieve ladingen, 1 negatieve lading.



De veldlijnen ontspringen op de positieve ladingen en eindigen op negatieve ladingen. Ook kunnen de veldlijnen naar het oneindige lopen of daar ontspringen. Dit laatste is altijd het geval bij een gravitatieveld.

De uitdrukking voor het elektrische veld tengevolge van puntladingen (formule 9) kan worden uitgebreid tot systemen met continue ladingsverdelingen. In principe bestaan continue ladingsverdelingen niet daar de lading gekwantiseerd is, dat wil zeggen dat er een kleinste hoeveelheid is, de zogenaamde elementairlading: $e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C, dat is de lading van het proton en -- met minteken -- van het elektron.
Volgens een moderne theorie zouden er kleinere ladingshoeveelheden bestaan in de vorm van quarks maar de experimentele evidentie hiervoor is momenteel nog onvoldoende. Bovendien zou deze elementaire hoeveelheid $\frac{1}{3}e$ bedragen waarmee het discrete karakter van de lading gehandhaafd blijft. Ladingsverdelingen in de natuur hebben dus een korrelige structuur en de benadering door een continue ladingsverdeling is alleen goed om het veld op grote afstand van de verdeling te berekenen. De continue beschrijving is bijvoorbeeld niet toegestaan als men het veld binnen in een kristal, dat bestaat uit een rooster van positieve en negatieve ionen, wil berekenen. In dat geval zal men het veld uitgaande van puntladingen, moeten berekenen.

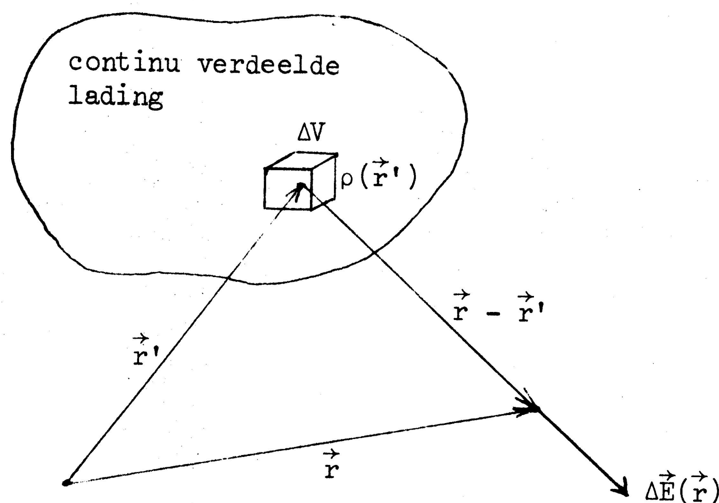
De uitdrukking voor het veld in een punt met plaatsvector $\vec{r}$ tengevolge van een continue ladingsverdeling wordt nu verkregen door het volume waarbinnen zich de lading bevindt in infinitesimale volume-elementjes te verdelen en de lading binnen zo'n volume-elementje ΔV te schrijven als

$$\Delta q = \rho(\vec{r}\,')\Delta V \qquad (11)$$

en op te vatten als een puntlading in de limiet $\Delta V \to 0$.
$\rho(\vec{r}\,')$ stelt de locale ladingsdichtheid voor.
Het totale veld wordt dan

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{Vol} \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \cdot dV. \qquad (12)$$

$\frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$ is een eenheidsvector (zie formule 3).



Het veld van een oppervlaktelading en van een lijnlading wordt op analoge wijze gevonden, alleen vindt de integratie in deze gevallen plaats over respectievelijk het oppervlak en de lijn waar zich de lading bevindt.

V.D. Potentiaal

In § II.B.9 op pag. 43 is uiteengezet dat in een conservatief krachtveld de arbeid die door de veldkracht wordt verricht alleen afhankelijk is van de positie van begin- en eindpunt en niet van de afgelegde weg. Equivalent hiermee is de formulering dat elke lijnintegraal van de kracht langs een gesloten lijn (kringintegraal) nul is:

$$\oint \vec{F}.d\vec{r} = 0. \qquad (13)$$

Deze uitdrukking kan worden beschouwd als een criterium voor een conservatief veld. We zullen nu laten zien dat het Coulomb veld van een puntlading een conservatief veld is. (Hetzelfde geldt voor het gravitatieveld van een puntmassa.)

Als de elektrische veldsterkte $\vec{E}(\vec{r})$ is, is de arbeid die de veldkracht verricht als een eenheidslading van punt $\vec{r}_1$ naar punt $\vec{r}_2$ getransporteerd wordt:

$$V = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}(\vec{r})d\vec{r}. \tag{14}$$

Het veld $\vec{E}(\vec{r})$ gegeven door formule (10) voor een puntlading in de oorsprong is

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}\vec{e}_r = - \text{grad} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r} . \tag{15}$$

Immers $\text{grad} \frac{1}{r} = - \frac{1}{r^2} \text{grad } r = - \frac{\vec{e}_r}{r^2}$ (zie pag. 48) (16)

Substitutie van (15) in (14) geeft

$$V = - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \text{grad} \frac{1}{r} \cdot d\vec{r}. \tag{18}$$

Nu is

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \text{grad}. V.d\vec{r} = V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1), \quad \text{dus is} \tag{19}$$

(Zie ook formule 30, pag. 49)

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} (\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}). \tag{20}$$

In deze uitdrukking voor de arbeid, die door de veldkracht is verricht, komt de afgelegde weg niet voor, alleen de posities van begin- en eindpunt zijn belangrijk, dus het veld is conservatief.

De potentiaal in het punt $\vec{r}$ wordt nu gedefinieerd als

$$\boxed{V(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{E}.d\vec{s}} \tag{21}$$

dat is de arbeid die de veldkracht moet verrichten om een positieve eenheidslading van het punt $\vec{r}$ naar het punt $\vec{r}_0$ te transporteren, of wat op hetzelfde neerkomt de arbeid die men moet verrichten om een positieve eenheidslading van $\vec{r}_0$ naar $\vec{r}$ te verplaatsen.

Dit houdt in dat de potentiële energie van een lading q in het punt $\vec{r}$ gelijk is aan q V. Het is niet noodzakelijk maar wel gemakkelijk om $\vec{r}_0$ in het oneindige te kiezen. Dit wordt dan ook meestal gedaan en de potentiaal in het punt $\vec{r}$ veroorzaakt door een puntlading q in de oorsprong is dan

$$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{r}}. \tag{22}$$

Als het veld door verschillende puntladingen q_j wordt veroorzaakt, is de potentiaal in het punt $\vec{r}$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_j \frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|} \tag{23}$$

In het geval van continue ladingsverdelingen wordt q_j vervangen door ρdV of σdO of λdl als de lading respectievelijk ruimtelijk, oppervlakkig of langs een lijn verdeeld is en moet worden geïntegreerd in plaats van gesommeerd.
Uit vergelijking (15) en (22) volgt dat we het verband tussen veldsterkte $\vec{E}$ en potentiaal V nu kunnen schrijven als

$$\boxed{\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\ V}. \tag{24}$$

Door het superpositie principe geldt dit verband ook voor meer dan één puntlading waarbij V dan gegeven wordt door (23) en $\vec{E}$ door (9).

Zoals de veldsterkte aanschouwelijk werd voorgesteld door veldlijnen kan men van de potentiaal een beeld krijgen door equipotentiaalvlakken (of lijnen), dat zijn verzamelingen van punten zodanig dat

$$V(\vec{r}) = \text{constant}. \tag{25}$$

Voor een puntlading zijn de equipotentiaalvlakken concentrische bollen met de lading in het middelpunt. Zie de equipotentiaalvlakken (lijnen) als stippellijnen in de figuur op pag. 101.
In concrete problemen is het vaak eenvoudiger om $V(\vec{r})$ te berekenen dan $\vec{E}(\vec{r})$, omdat V een scalaire grootheid is en $\vec{E}$ een vector. Als men V berekend heeft kan $\vec{E}$ volgens (24) worden berekend, hetgeen neerkomt op een differentiatie van een scalaire functie naar de plaats.
Voor een conservatief veld $\vec{E}$ geldt

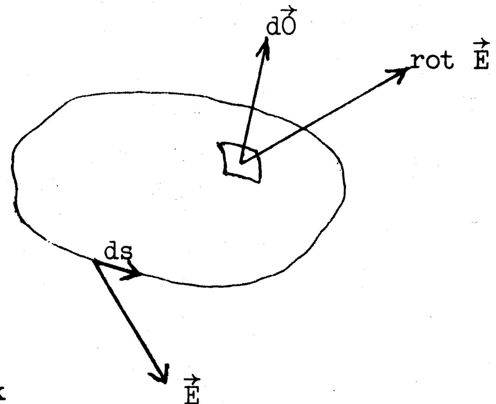
$$\mathrm{rot}\ \vec{E} = -\ \mathrm{rot\ grad}\ V = 0 \tag{26}$$

Omgekeerd geldt ook dat als $\mathrm{rot}\ \vec{E} = 0$ in een enkelvoudig samenhangend gebied de vector $\vec{E}$ te schrijven is als de gradiënt van een scalar en derhalve een conservatief veld voorstelt.

Om dit te bewijzen, wordt de stelling van Stokes gebruikt:

$$\boxed{\oint \vec{E}.d\vec{s} = \int \text{rot } \vec{E}.d\vec{O}} \tag{27}$$

waarbij de lijnintegraal langs een gesloten lijn moet worden genomen (kringintegraal) en de oppervlakte integraal over een of ander oppervlak dat de gesloten lijn tot rand heeft.



De voorwaarde voor het bestaan van zo'n oppervlak is dat het gebied enkelvoudig samenhangend moet zijn.
Daar volgens de veronderstelling in elk punt van dit oppervlak geldt

rot $\vec{E} = 0$

is dus $\oint \vec{E}.d\vec{s} = 0$, hetgeen betekent dat het veld conservatief is.

De arbeid die men moet verrichten om een eenheidslading uitgaande van een bepaald punt $\vec{r}$ over een afstand te verplaatsen in de richting van de x-as ($\Delta x\ \vec{e}_x$), is dus

$$V(x + \Delta x, y, z) - V(x, y, z) \approx \frac{\partial V}{\partial x}\,\Delta x. \tag{28}$$

Anderzijds is deze arbeid $-\int_{\vec{r}}^{\vec{r}+\Delta x.\vec{e}_x} \vec{E}.d\vec{s} \approx -E_x\Delta x$ (29)

Dus is $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$ en analoog $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$ en $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$. (30)

V.E. Stelling van Gauss

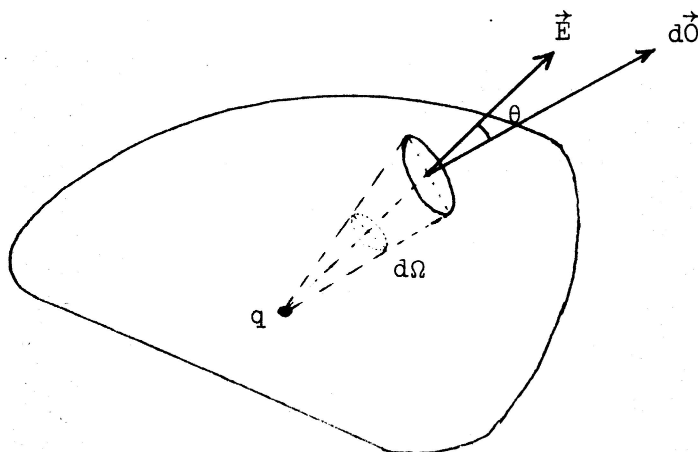
Hoewel de berekening van de potentiaal V vanwege zijn scalair karakter vaak de voorkeur verdient boven de berekening van het vectorveld $\vec{E}$ zijn er gevallen waarbij het juist omgekeerd is.
Als namelijk de ladingsverdeling een zekere mate van symmetrie heeft, is een snelle en doorzichtige berekening van $\vec{E}$ mogelijk.

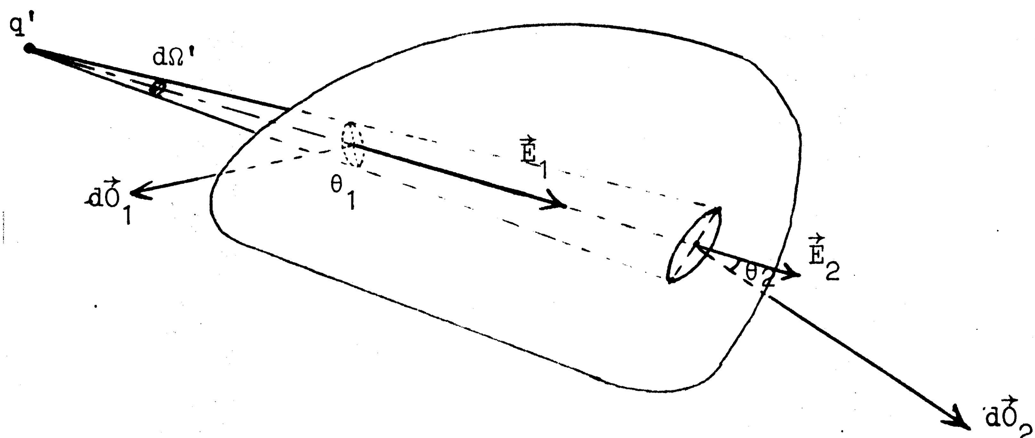
Dit geschiedt dan met de stelling van Gauss:

$$\boxed{\oint_O \vec{E}.d\vec{O} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_i}. \qquad (31)$$

Het linkerlid van (31) wordt (naar analogie van vloeistofstroming) de <u>flux</u> van het veld $\vec{E}$ door het gesloten oppervlak O genoemd. Het rechterlid van (31) omvat de totale lading die binnen het oppervlak O voorkomt. De formule brengt tot uitdrukking dat de ladingen de bronnen zijn van het elektrische veld.

We beschouwen een puntlading q en willekeurig oppervlak waarbinnen q ligt





In het punt A van het oppervlakte elementje $d\vec{O}$ is de veldsterkte

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ \vec{e}_r \ .$$

De flux door dit elementje is dus

$$\vec{E}.d\vec{O} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{dO\ \cos\theta}{r^2} \ . \qquad (32)$$

Nu is $\dfrac{dO\ \cos\theta}{r^2} = d\Omega$ de ruimtehoek van dO gezien vanuit q, (33)

dus is $\vec{E}.d\vec{O} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\ d\Omega$ en geïntegreerd over het gehele (34)

gesloten oppervlak wordt dit $\oint \vec{E}\ d\vec{O} = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$. (35)

Bevinden er zich binnen dit oppervlak meer ladingen q_i dan geldt krachtens het superpositie principe

$\oint \vec{E}.d\vec{O} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\ \sum q_i$, de stelling van Gauss. (36)

Beschouw nu een gesloten oppervlak waarbinnen zich geen lading bevindt en waarbuiten één puntlading q' voorkomt. Het veld van deze lading is bolsymmetrisch en de flux in het ruimtehoekje dΩ' treedt ons gesloten oppervlak binnen door het oppervlakje $d\vec{O}_1$ en treedt er weer uit door $d\vec{O}_2$. De veldsterkten E_1 en E_2 verhouden zich omgekeerd als de kwadraten van de afstanden r_1 en r_2 van respectievelijk $d\vec{O}_1$ en $d\vec{O}_2$ van q, dus

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{r_2^{\,2}}{r_1^{\,2}} \ . \qquad (37)$$

Verder is $\dfrac{dO_1\cos\theta_1}{dO_2\cos\theta_2} = -\dfrac{r_1^{\,2}}{r_2^{\,2}}$ dus is (38)

$$\frac{E_1\ dO_1\ \cos\theta_1}{E_2\ dO_2\ \cos\theta_2} = -1 \quad \text{of} \quad E_1 dO_1 \cos\theta_1 + E_2 dO_2 \cos\theta_2 = 0. \qquad (39)$$

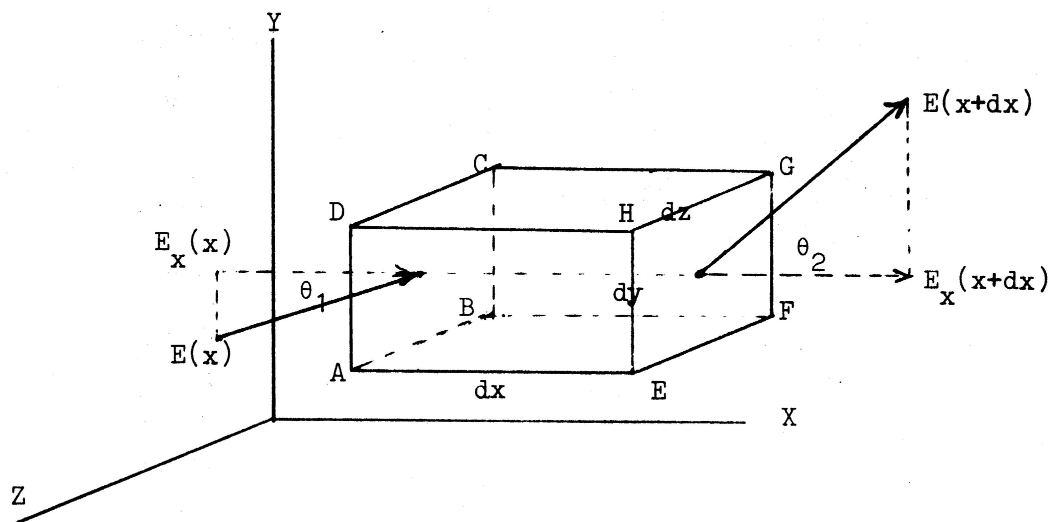
Door dit uit te breiden tot het gehele gesloten oppervlak volgt

$\oint \vec{E}.d\vec{O} = 0$ als er zich dus binnen dit oppervlak geen lading bevindt. (40)

Op grond van het superpositie principe kan nu dus algemeen worden gesteld dat voor elk oppervlak waarbinnen zich geen lading bevindt, vergelijking (40) geldt. Hiermee is de stelling van Gauss (verg. 31 en 40) dus bewezen. Daar in verg. (31) en (40) een integraal voorkomt, wordt deze formulering de wet van Gauss in integraalvorm genoemd. De wet van Gauss in differentiële vorm wordt uit het bovenstaande verkregen door toepassing van vectoranalyse.

We passen de wet van Gauss (verg. 31) dan toe op een infinitesimaal parallelepipedum waarvan de ribben evenwijdig zijn aan de coördinaatassen X, Y en Z en gelijk aan dx, dy en dz.

Het volume is $dv = dx\,dy\,dz$.



De flux door oppervlak ABCD is $-E(x).dydz.\cos\theta_1 = -E_x(x)dydz$ (41)

De flux door oppervlak EFGH is $E(x+dx)dydz.\cos\theta_2 = E_x(x+dx)dydz$ (42)

De netto flux door deze beide oppervlakken -- in hydrodynamische termen betekent het datgene wat er meer naar buiten stroomt dan naar binnen -- is de som van (41) en (42):

$$\{-E_x(x) + E_x(x+dx)\}\,dydz = \frac{\partial E_x}{\partial x}\,dxdydz = \frac{\partial E_x}{\partial x}\,dv. \qquad (43)$$

Op analoge wijze worden uitdrukkingen verkregen voor de totale flux in de y richting:

$\frac{\partial E_y}{\partial y}$ dv en in de z-richting: $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ dv.

Als binnen het parallelepipedum de lading dq zit, krijgt de stelling van Gauss (31) de vorm

$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) dv = \frac{dq}{\varepsilon_0} . \qquad (44)$$

Voeren we nu nog de grootheid ladingsdichtheid $\rho = \frac{dq}{dv}$ in, dat is de lading per volume eenheid, dan wordt (44)

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} . \qquad (45)$$

Het linkerlid van (45) wordt de divergentie van de vector $\vec{E}$ genoemd en dit wordt geschreven als div $\vec{E}$.

De differentiële vorm van de wet van Gauss is dan $\boxed{\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$. (46)

De fysische betekenis van deze formulering is dat hier het verband gelegd wordt tussen een eigenschap van het elektrische veld in een bepaald punt van de ruimte en iets van de ladingsverdeling, namelijk de ladingsdichtheid in datzelfde punt. div $\vec{E}$ is een grootheid die de locale verandering van de veldsterkte aangeeft en dus in verband gebracht met de ladingsdichtheid op diezelfde plaats. Dit strookt met het concept dat de ladingen de bronnen van het veld zijn en div $\vec{E}$ kan als specifieke bronsterkte worden beschouwd.

Divergentie is een vectordifferentiaal operator die aan een vectorveld een scalair veld toevoegt. Zoals we hebben gezien in § II.B.9 is de gradient een differentiaal operator die aan een scalair veld een vectorveld toevoegt.

In de vectoranalyse komen twee theorema's van Gauss voor: één in differentiële vorm en één in integrale vorm:

$$\boxed{\text{div } \vec{E} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\oint \vec{E}.d\vec{O}}{\Delta v}} \qquad (47)$$

$$\boxed{\int \text{div } \vec{E} \, dv = \oint \vec{E}.d\vec{O}} \qquad (48)$$

Een beknopte en handige schrijfwijze voor div $\vec{E}$ is $\nabla.\vec{E}$ waarin ∇ de Nabla operator is die differentieert en vectorkarakter heeft.

grad $V = \nabla V$; div $\vec{E} = \nabla.\vec{E}$; rot $\vec{v} = \nabla \times \vec{v}$. (49)

We laten nu nog zien dat het elektrische veld van een puntlading overal bronvrij is, dat wil zeggen div $\vec{E} = 0$ behalve uiteraard in het punt waar de lading zich bevindt: dit is een singulier punt dat we als oorsprong nemen.

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (50)$$

Nu is div $\frac{\vec{r}}{r^3} = \text{div}(\frac{x}{r^3}\vec{e}_x + \frac{y}{r^3}\vec{e}_y + \frac{z}{r^3}\vec{e}_z) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{r^3}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{y}{r^3}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{z}{r^3})$. (51)

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{r^3}) = \frac{1}{r^3} + x\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{r^3}) = \frac{1}{r^3} + x\frac{d}{dr}(\frac{1}{r^3})\frac{\partial r}{\partial x} . \quad (52)$$

Daar $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ is $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ (53)

Substitutie van (53) in (52) geeft:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{r^3}) = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} . \quad (54)$$

Met analoge uitdrukkingen voor de termen met y en z wordt (51)

$$\text{div}\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{3}{r^3} - (\frac{3x^2}{r^5} + \frac{3y^2}{r^5} + \frac{3z^2}{r^5}) = 0. \quad (55)$$

Hiermee is dus bewezen dat de elektrostatische veldsterkte buiten de lading een bronvrij veld geeft.

(Het bewijs gaat iets sneller door te stellen $\vec{E} = f(r)\vec{r}$ en (56)

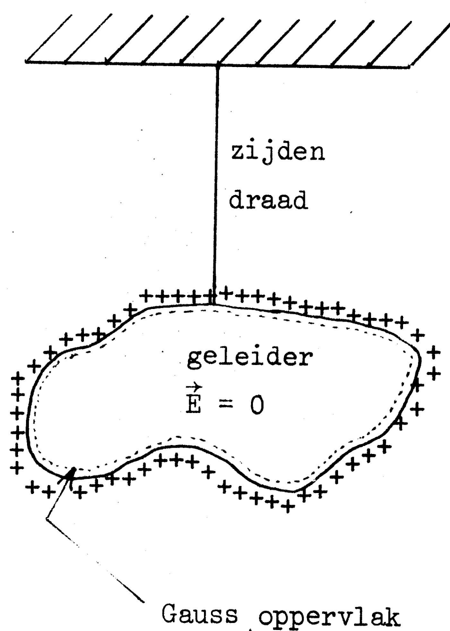
gebruik te maken van div $f(r)\vec{r} = 3f(r) + r\frac{df(r)}{dr}$.) (57)

Door generalisatie op grond van het superpositie principe geldt ook voor een willekeurig aantal ladingen of continue ladingsverdeling :

div $\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, hetgeen impliceert dat div $\vec{E} = 0$ op plaatsen (58)

waar zich geen lading bevindt.

De $\frac{1}{r^2}$ wet van Coulomb en de fluxstelling van Gauss zijn in feite alternatieve formuleringen van de essentie van het elektrostatische veld. De fluxstelling stelt ons, meer dan de wet van Coulomb, in staat een aantal eigenschappen van elektrostatische lading en veld te begrijpen en te doorzien. Zo kunnen we het experimentele gegeven van Franklin (1755), dat lading op een geisoleerd opgestelde geleider gebracht zich geheel op het buitenoppervlak van die geleider bevindt, met de fluxstelling terstond rijmen. Binnen de geleider kan geen veld aanwezig zijn.



Zou het er toch zijn dan zou er een elektrische stroom gaan vloeien, net zo lang, tot zich binnen de geleider nergens meer een veld ongelijk nul bevindt. De ladingsverdeling binnen de geleider zal dan zodanig zijn dat overal binnen de geleider $\vec{E} = 0$ is.

Nemen we nu het oppervlak onder de buitenkant als ons Gauss-oppervlak (de gestippelde lijn) dan is op elk punt van dit oppervlak $\vec{E} = 0$, dus is $\oint E.dO = 0$, dus is volgens de fluxstelling $\sum q_i = 0$ binnen dit oppervlak, zodat alle opgebrachte lading q_1, q_2, q_3 enz. zit op de buitenkant van het oppervlak.

Heel nauwkeurige metingen met een zeer gevoelige elektrometer binnen twee concentrische bollen hebben aangetoond dat lading op de buitenste bol gebracht niet in het minst werd overgedragen op de binnenste bol en hieruit leidden Plimpton en Lawton in 1936 af dat de exponent in de wet van Coulomb moet liggen tussen

1,999999998 en 2,000000002

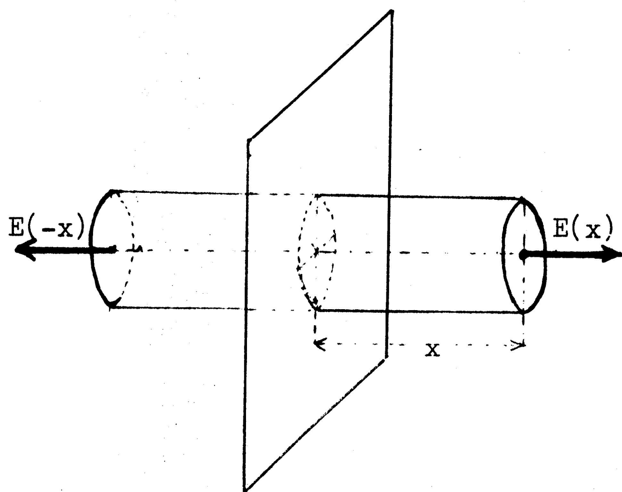
Het feit dat de exponent in de $\frac{1}{r^2}$-wet zo precies 2 is, stemt tot nadenken.

V.F. Toepassingen van de Stelling van Gauss

1. Berekening van het veld van een vlakke oneindig grote plaat die uniform geladen is met een oppervlakteladingsdichtheid σ. Daar de plaat rotatiesymmetrie vertoont om elke as loodrecht op de plaat zal het veld $\vec{E}$ loodrecht op de plaat staan. Verder is het systeem invariant voor verplaatsing in alle richtingen evenwijdig aan de plaat. Daardoor zal $\vec{E}$ in alle punten van èen vlak evenwijdig aan de plaat constant zijn en zal E alleen nog van de afstand x tot de plaat kunnen afhangen. Uit de spiegelsymmetrie ten opzichte van de plaat volgt

   $E(x) = - E(-x)$.

   Als Gauss oppervlak kiezen we een rechte cirkelcylinder die met zijn as loodrecht op de plaat staat en deze doorsnijdt. Alleen de oppervlakken van de cylinder evenwijdig aan de plaat leveren een bijdrage tot de flux, het cylinderoppervlak niet. De lading binnen de cylinder is σO, de totale flux $2.E.O$ dus is



   $$2EO = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma O$$ en is dus

   $$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} . \qquad (59)$$

   Het veld is aan weerszijden van de plaat dus homogeen en is te schrijven als

   $$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_n, \qquad (60)$$

   waarbij $\vec{e}_n$ de normaaleenheidsvector op de plaat is.

2. Berekening van het veld van een uniform geladen isolerende bol met straal R en totale lading Q.

Daar de ladingsverdeling bolsymmetrisch is, zal het veld radiaal gericht zijn en alleen van de afstand r tot het centrum van de bol afhangen. Wat de plaats betreft, onderscheiden we twee gevallen:

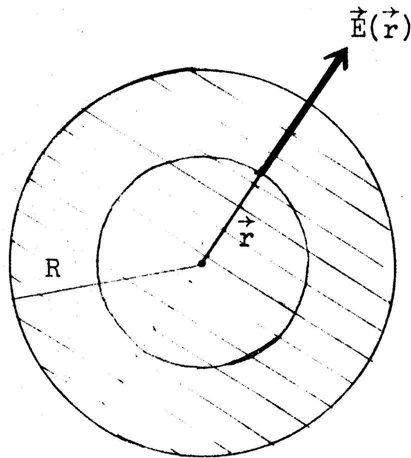
a) $r \geqq R$. Toepassing van $\oint \vec{E}.d\vec{O} = \frac{q}{\varepsilon_0}$ geeft

$E\,4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ dus $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ dat wil zeggen

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{e}_r. \qquad (60)$$

Hieruit kan de conclusie worden getrokken dat het veld van een bolsymmetrische ladingsverdeling in punten buiten deze ladingsverdeling gelijk is aan het veld van een puntlading die gelijk is aan de totale lading van de ladingsverdeling. Voor gravitatiekrachten betekent dit dat hemellichamen met bolsymmetrische massa-verdelingen elkaar als puntmassa's aantrekken.

b) $r \leqq R$. Als Gauss oppervlak nemen we een bol met als middelpunt het midden van de ladingsverdeling en als straal r.



Het veld $\vec{E}(\vec{r})$ staat op elk punt van het boloppervlak loodrecht op dit oppervlak. Toepassing van de fluxstelling voor dit oppervlak geeft dan

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

De lading binnen de bol met straal r is $q = (\frac{r}{R})^3 Q$,

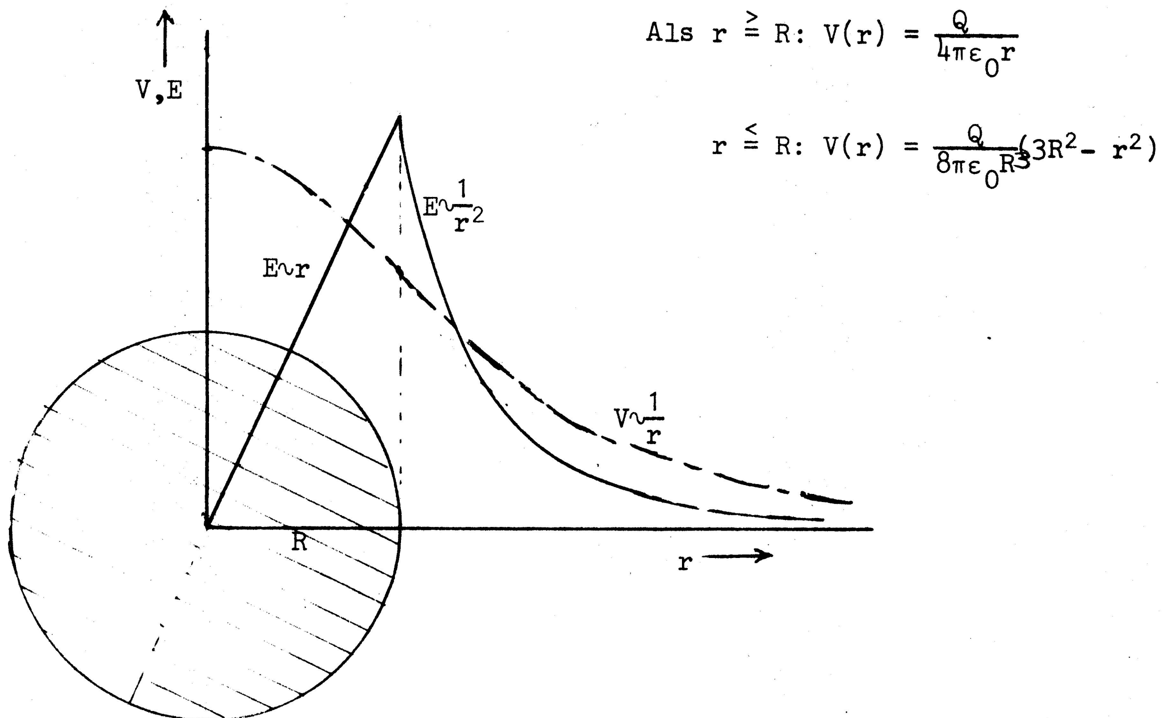
dus is $$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi R^3\varepsilon_0}.r\vec{e}_r. \qquad (61)$$

Het veld in het centrum is dus 0 en binnen de bol is het veld evenredig met de afstand tot het centrum, buiten de bol omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand tot het centrum. Met behulp van de uitdrukking

$V(r) = \int_r^{\infty} E\, dr$ kan de potentiaal worden berekend. (62)

Als $r \geq R$: $V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

$r \leq R$: $V(r) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(3R^2 - r^2)$



V.G. Vergelijkingen van Poisson en Laplace

De stelling van Gauss is in differentiële vorm

$$\mathrm{div}\, \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (63)$$

een partiële differentiaalvergelijking van de eerste orde. In Cartesische componenten geschreven, luidt (63):

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} . \qquad (64)$$

Nu is volgens (30) $E_x = - \frac{\partial V}{\partial x}$ dus is $\frac{\partial E_x}{\partial x} = - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ (65)

met analoge uitdrukkingen voor de andere termen van (64).

Dus is $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, de differentiaalvergelijking (65)

voor de potentiaal, die de vergelijking van Poisson genoemd wordt. Met behulp van de vectoranalyse is de formulering van het bovenstaande div $\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$; $\vec{E} = -$ grad V; div grad V $= -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$; $\boxed{\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$. (66)

Δ is de Laplace operator of Laplaciaan die op allerlei coördinaatsystemen kan worden toegepast. In Cartesische coördinaten is

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} . \qquad (67)$$

De vergelijking van Poisson is een tweede orde differentiaalvergelijking maar de functie waar het om gaat, de potentiaal, is scalair, terwijl in de stelling van Gauss de vectorgrootheid $\vec{E}$ voorkomt. Op plaatsen waar de ladingsdichtheid 0 is gaat de vergelijking van Poisson over in de vergelijking van Laplace:

$$\boxed{\Delta V = 0} . \qquad (68)$$

Dit is een van de belangrijkste vergelijkingen van de theoretische fysica die niet alleen in de elektriciteitsleer en de gravitatietheorie een belangrijke rol speelt, maar ook in de theorie van de vloeistofbeweging (hydrodynamica), de elasticiteitsleer, de theorie van de diffusie en de warmtegeleiding.

Bij de oplossing van de vergelijkingen van Poisson en Laplace kunnen twee onafhankelijke randvoorwaarden worden gesteld (de differentiaalvergelijking is van de 2e orde). De functies V die een oplossing zijn van (66) en (68), als deze in sferische coördinaten worden geformuleerd, worden harmonische functies genoemd en de behandeling hiervan is een hoofdstuk in de mathematische fysica.

We geven van de vergelijkingen van Laplace en Poisson een ééndimensionaal voorbeeld:

a) De berekening van het potentiaalverloop tussen twee oneindig grote evenwijdige vlakke platen met afstand d die de potentialen V_1 en V_2 hebben.

De symmetrie suggereert weer dat de potentiaal alleen van de x-coördinaat loodrecht op de vlakken afhangt. In de ruimte tussen de platen zit geen lading dus is (Laplace)

$\frac{d^2V}{dx^2} = 0$ (63). Integratie geeft $\frac{dV}{dx} = C$:

de veldsterkte is dus constant $E = -C$; $\int dV = -E\,dx$;

$V = -Ex + D$ met de randvoorwaarden $V = V_1$ als $x = 0$ en $V = V_2$

als $x = d$, $V_1 = D$ en $V_2 = -Ed + V_1$ dus $E = \frac{V_1 - V_2}{d}$.

De potentiaal tussen de platen is dus

$$V = \frac{V_2 - V_1}{d} x + V_1. \qquad (64)$$

b) De berekening van de potentiaal in de situatie onder a) waarbij zich nu bovendien tussen de platen een uniform verdeelde lading met ladingsdichtheid ρ bevindt.

$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{-\rho}{\varepsilon_0}$ (65), $\frac{dV}{dx} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}x + C$. De veldsterkte $E = -\frac{dV}{dx}$ (65) is lineair in x

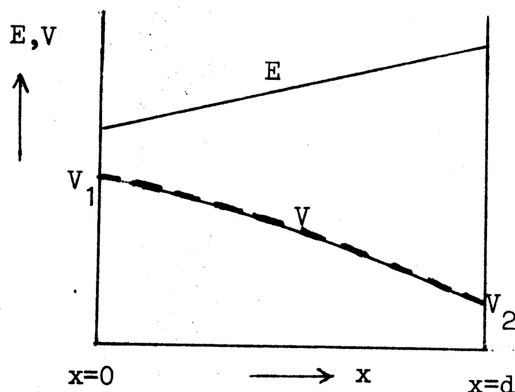
$\int dV = \int(-\frac{\rho}{\varepsilon_0}x + C)dx$ dus $V = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}x^2 + Cx + D$.

De randvoorwaarden zijn weer $V = V_1$ als $x = 0$ en $V = V_2$ als $x = d$;

dan volgt $D = V_1$; $V_2 = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}d^2 + Cd + V_1$; $C = \frac{1}{d}(V_2 - V_1 + \frac{\rho}{2\varepsilon_0}d^2)$

dus is $$V = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}x^2 + \frac{x}{d}(V_2 - V_1 + \frac{\rho d^2}{2\varepsilon_0}) + V_1. \qquad (66)$$

Het grafische verband tussen V en x is een parabool.



V.H. De Energie in een $\frac{1}{r^2}$ -krachtveld

In §V.D is de arbeid uitgerekend die men moet verrichten om een eenheidslading uit het oneindige naar het punt $\vec{r}$ te brengen (zie formule 22, pag. 105).

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} \; . \tag{67}$$

Hierbij wordt het veld teweeggebracht door een lading q in de oorsprong en de grootheid V is gedefinieerd als potentiaal in het punt $\vec{r}$. Om nu de configuratie tot stand te brengen waarbij ladingen q_1 en q_2 op plaatsen respectievelijk $\vec{r}_1$ en $\vec{r}_2$ zitten, is dus nodig

de arbeid $$W_e(q_1,q_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1q_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|} \; . \tag{68}$$

Wordt vervolgens een lading q_3 in positie $\vec{r}_3$ gebracht dan is daarvoor

nodig de energie $$W_e(q_1,q_3) + W_e(q_2,q_3) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1q_3}{|\vec{r}_1-\vec{r}_3|} + \frac{q_2q_3}{|\vec{r}_2-\vec{r}_3|}\right). \tag{69}$$

De arbeid die verricht moet worden om een configuratie van N puntladingen te realiseren, is dan

$$W_e = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}{}'\sum_{j=1}^{N}\frac{q_iq_j}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|} \tag{70}$$

waarbij gesommeerd moet worden over alle paren. Het accent bij het sommatiesymbool sluit de termen i = j uit. De factor $\frac{1}{2}$ hangt samen met het feit dat bij de sommatie elk paar tweemaal voorkomt. W_e wordt wel de assemblage energie van de ladingsconfiguratie genoemd.

Met formule (70) kan bijvoorbeeld de energie inhoud van een ionenrooster worden berekend. Bij gelijknamige ladingen is de arbeidsterm positief, bij ongelijknamige ladingen negatief. Daar massa's elkaar aantrekken en niet afstoten is de assemblage energie W_g voor een massaconfiguratie altijd negatief:

$$W_g = -\frac{1}{2} G \sum_{i=1}^{N}{}' \sum_{j=1}^{N} \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} . \qquad (71)$$

De uitdrukkingen (69) en (71) zijn eenvoudig te generaliseren voor continue ladings- en massaverdelingen.

We zullen dit doen voor W_e. Voor de puntladingen q_i en q_j substitueren we $\rho(\vec{r})\Delta v$ en $\rho(\vec{r}')\Delta v'$ en de sommaties worden integraties:

$$W_e = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \iint \frac{\rho(\vec{r}).\ \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv.dv'. \qquad (72)$$

Voor een continue ladingsverdeling is de potentiaal (vergelijk formule 23, pag. 105):

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\rho\ (\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \qquad (73)$$

, zodat de assemblage energie te schrijven is als

$$W_e = \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r})\ V(\vec{r})\ dv. \qquad (74)$$

Voor oppervlakte- of lijnladingen gelden uiteraard analoge formules. In concrete gevallen wordt het eenvoudigst eerst $V(\vec{r})$ uitgerekend en vervolgens met (74) W_e.

Als voorbeeld berekenen we de elektrostatische energie van een homogeen geladen bolopppervlak met totale lading Q en bolstraal R. De oppervlakteladingsdichtheid is $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$, (75)

de potentiaal in elk punt van het boloppervlak $\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$. (76)

Formule (74) voor een oppervlaktelading luidt

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot \int_{opp.} \sigma(\vec{r}).\ V(\vec{r}).\ dO. \qquad (77)$$

In ons geval wordt dat

$$W_e = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q}{4\pi R^2} \cdot \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \cdot 4\pi R^2 = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} \quad . \qquad (78)$$

Als we nu de straal van de bol laten toenemen van R naar $R + \Delta R$ is de verandering van de assemblage energie

$$\Delta W_e = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R + \Delta R} - \frac{1}{R}\right) \approx - \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \frac{\Delta R}{R^2} \quad . \qquad (79)$$

Als de bol groter wordt, neemt de elektrostatische energie af. Bij groter worden van de bol van R naar $R + \Delta R$ verdwijnt het veld in de bolschil ΔR, verder blijft het veld overal onveranderd omdat Q gelijk blijft. Met het verdwijnen van een deel van het veld gaat een vermindering van de assemblage energie gepaard. Het elektrische veld in de bolschil $R \rightarrow R + dR$ is

$$E(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \quad . \qquad (80)$$

De energiedichtheid $W_{spec.}$ van het elektrische veld wordt verkregen door $-\Delta W_e$ van formule (79) te delen door het volume van de bolschil $4\pi R^2 \Delta R$, uitkomst

$$W_{spec.} = \frac{Q^2}{32\pi^2 \varepsilon_0 R^4} \quad . \qquad (81)$$

Uit (80) en (81) volgt $\quad W_{spec.} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2. \qquad (82)$

De energiedichtheid in een bepaald punt in een elektrisch veld is dus evenredig met het kwadraat van de veldsterkte ter plaatse; de evenredigheidsfactor is $\frac{\varepsilon_0}{2}$.

De totale energie van een elektrisch veld is dan te berekenen als

$W_e = \frac{\varepsilon_0}{2} \int E^2 dv$, waarbij geïntegreerd moet worden over het gehele volume waar $E \neq 0$ is. $\qquad (83)$

Algemeen kan worden gesteld dat voor ruimtelijk begrensde ladingsverdelingen de assemblage energie gelijk is aan de veldenergie.

Door in verg. (83) te substitueren $\quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (84)$

en dan te integreren over de gehele ruimte buiten de geladen bol met

straal R vinden we de veldenergie

$$W_e = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_R^\infty \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 . \, 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} \quad . \tag{85}$$

Dit is precies de assemblage energie van formule (78).

Tenslotte berekenen we nog als voorbeeld de gravitationele assemblage energie van een homogene bol met massa M, straal R en dichtheid ρ. De arbeid die moet worden verricht om een bolschil met massa dm, straal r en dikte dr in het gravitatieveld van de resterende bol met massa m_r naar het oneindige te transporteren, is

$$G \frac{m_r dm}{r} = \frac{G}{r} \cdot \frac{4}{3} \pi\rho r^3 \, . \, 4\pi r^2 \rho dr = \frac{16}{3} \pi^2 G\rho^2 r^4 dr \tag{86}$$

Over de gehele bol geïntegreerd, geeft dit voor de assemblage energie of gravitationele eigenenergie van de bol

$$W_g = - \frac{16}{15} \pi^2 G\rho^2 R^5 = - \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \tag{87}$$

Voor de homogeen veronderstelde aarde is dit $-2,2 \cdot 10^{33}$ J, voor de zon $-2 \cdot 10^{41}$ J.

Door inkrimping van een ster neemt de eigenenergie af en de kinetische energie van de atomen en atoomkernen, c.q. de temperatuur toe. Een ster beschikt dus krachtens de gravitatie over een bron van energie (gravitatie collaps).

VI. DE WETTEN VAN KEPLER

Lit.: AF 9; S 4; B 9.

VI.A. Inleiding

In Hoofdstuk V is de $\frac{1}{r^2}$-krachtwet voor het gravitatieveld en het elektrostatische veld behandeld, waarbij de plaats van elke massa en lading gefixeerd was. Het is echter duidelijk dat deeltjes die elkaar aantrekken of afstoten en niet op de een of andere manier vastgeprikt zitten onder invloed van deze wisselwerkingskrachten zullen gaan bewegen. Bij de beweging van die deeltjes treedt tussen elk tweetal van de verzameling een centrale kracht op, dat wil zeggen een kracht die gericht is langs de verbindingslijn van het tweetal.

Als we nu veronderstellen dat er buiten de onderlinge wisselwerking der deeltjes geen uitwendige krachten op het systeem worden uitgeoefend, gelden de volgende behoudswetten (Zie § III.B, pag. 69):

1. Het zwaartepunt van het systeem beweegt met constante snelheid. Dit volgt uit verg. (23), pag. 71 want daar $\sum_i \vec{F}_i^{\,e} = 0$ is

   $$\dot{\vec{P}} = M\ddot{\vec{r}}_z = \sum_i F_i^{\,e} = 0, \text{ dus } \quad \ddot{\vec{r}}_z = 0 \text{ zodat} \qquad (1)$$

   $\dot{\vec{r}}_z$, dit is de snelheid van het zwaartepunt, constant is.

2. Het impulsmoment $\vec{L}$ blijft behouden aangezien $r_z \times \dot{\vec{P}} = \dot{\vec{L}}$ (2)

   en $\dot{\vec{P}} = 0$ dus $\dot{\vec{L}} = 0$ en dus is $\vec{L}$ constant (zie verg. (24) pag. 71).

3. Het spinimpulsmoment $\vec{S}$, d.i. het impulsmoment van de beweging ten opzichte van het zwaartepunt, blijft behouden. Volgens § III.B, pag. 70 is

   $$\vec{S} = \sum_i m_i \vec{r}_i^{\,z} \times \vec{v}_i^{\,z} \qquad (3)$$

   en

   $$\vec{M}^{ez} = \dot{\vec{S}}. \qquad (4)$$

   Nu is

   $$\vec{M}^{ez} = \sum_i \vec{r}_i^{\,z} \times \vec{F}_i^{\,e}. \qquad (5)$$

   Omdat er geen uitwendige krachten werken, is $\vec{M}^{ez} = \dot{\vec{S}} = 0$, dus is $\vec{S}$ constant.

Met behulp van de formuleringen van § III.B kunnen we het meer-deeltjes-bewegingsprobleem nu dus toespitsen op een beweging ten opzichte van het zwaartepunt met het gegeven dat het spin-impulsmoment van het gehele systeem behouden blijft.

In Hoofdstuk V hebben we met behulp van de fluxstelling aangetoond dat het gerechtvaardigd is hemellichamen (c.q. ruimtelijk verdeelde ladingen) als puntmassa's (c.q. puntladingen) op te vatten op voorwaarde dat de massaverdeling (c.q. ladingsverdeling) bolsymmetrisch is. In het vervolg zal derhalve over puntmassa's of deeltjes worden gesproken. Nu is gebleken dat het dynamische meerdeeltjesprobleem alleen dan analytisch oplosbaar is als het aantal deeltjes slechts twee is. Het drie- en meerdeeltjesprobleem is alleen met computerberekeningen bij benadering op te lossen. In de rest van dit hoofdstuk wordt het tweedeeltjesprobleem behandeld.

VI.B. Het Twee-Deeltjes Probleem

In § III.A, pag. 68 is uiteengezet dat de beweging van twee deeltjes, afgezien van de zwaartepuntsbeweging, kan worden opgevat als de beweging van één deeltje ten opzichte van een inertiaal waarnemer met gereduceerde massa

$\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ en dat op dit "pseudodeeltje" een kracht (6a)

werkt gelijk aan de wisselwerkingskracht tussen de twee oorspronkelijke deeltjes. De massa wordt gereduceerd, de kracht daarentegen blijft onveranderd. De bewegingsvergelijkingen van de deeltjes m_1 en m_2 zijn respectievelijk

$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -\dfrac{\gamma}{r_{12}^2}\,\vec{e}_{12}$ (7a) en $m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \dfrac{\gamma}{r_{12}^2}\,\vec{e}_{12}$ (7b) (7ab)

waarbij $\gamma = Gm_1m_2$ is. Dan is (6b)

$\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = -\dfrac{\gamma}{r_{12}^2}\,\vec{e}_{12}\cdot\left(\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}\right)$, anders geschreven

$$\boxed{\mu\,\ddot{\vec{r}}_{12} = -\frac{\gamma}{r_{12}^2}\,\vec{e}_{12}.} \qquad (8)$$

Dit is de bewegingsvergelijking voor het deeltje met gereduceerde massa μ.

Daar $\vec{r}_z = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$ is (9)

$\vec{r}_1 = \vec{r}_z + \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}_{12}$ (10a) en $\vec{r}_2 = \vec{r}_z - \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}_{12}$ (10b) (10ab)

Als de bewegingsvergelijking (8) is opgelost, zijn met behulp van (10) dus ook de baanvergelijkingen van de deeltjes m_1 en m_2 afzonderlijk uit te rekenen. Uit de beide uitdrukkingen (10) volgt dat de banen van m_1 en m_2 gelijkvormig zijn.
Het zal blijken dat de banen van m_1 en m_2 en μ kegelsneden zijn.

VI.C. Impulsmoment; Perkenwet: Tweede Wet van Kepler

In de vorige paragraaf is het tweedeeltjesprobleem teruggebracht tot een eendeeltjesprobleem, waarbij een enkel deeltje met massa μ zich bevindt in een centraal-symmetrisch krachtveld. In § II.B.6 is reeds opgemerkt dat in dit geval het impulsmoment $\vec{J}$ ten opzichte van het centrum constant is en wel omdat het krachtmoment ten opzichte van dit centrum nul is. Door de snelheid te ontbinden in het stelsel van poolcoördinaten (zie pag. 19):

$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$ en te substitueren in de uitdrukking (11)

voor het impulsmoment $\vec{L} = \vec{r} \times \mu\vec{v} = \vec{r} \times \mu(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)$ (12)

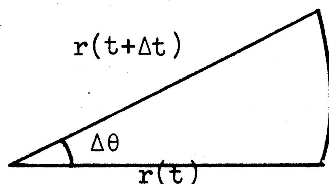
krijgen we, daar $\vec{r} \times \vec{e}_r = 0$:

$\vec{L} = \vec{r} \times \mu r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta = \mu r^2\dot{\theta}(\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta)$. (13)

Deze vector is constant van grootte en richting, waaruit volgt dat het r-θ-vlak, waarin het deeltje beweegt, niet van richting verandert, hetgeen logisch is omdat de kracht in dit vlak ligt.

Dus is $r^2\dot{\theta} = \dfrac{L}{\mu}$. (14)

Dit betekent dat het oppervlak, dat de voerstraal per tijdseenheid



bestrijkt -- de zogenaamde perksnelheid -- gelijk is aan $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ en derhalve constant is. Dit is de tweede wet van Kepler: de perkenwet.

Differentiatie van (14) naar de tijd geeft

$2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0$ of

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0. \qquad (15)$$

Dit is net de uitdrukking voor de azimutale component van de versnelling a_θ (zie formule (23), pag. 19) en het feit dat deze 0 is, komt overeen met het centrale karakter van de kracht. De wet van behoud van impulsmoment heeft dus niets te maken met de $\frac{1}{r^2}$ functie, maar is alleen te danken aan het feit dat het krachtveld centraal is.

VI.D. Oplossing van de Bewegingsvergelijking

De differentiaalvergelijking voor de beweging van het deeltje met gereduceerde massa μ is volgens formule (8), pag. 123:

$$\mu\ddot{\vec{r}} = -\frac{\gamma}{r^2}\vec{e}_r. \qquad (16)$$

De uitdrukking voor de versnelling in poolcoördinaten is (zie § II formule (23), pag. 19)

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)e_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta. \qquad (17)$$

De kracht is centraal dus de θ-component van de versnelling is 0 (perkenwet!) dus wordt (16):

$$\mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{\gamma}{r^2} \quad . \qquad (18)$$

Voor de oplossing van deze differentiaalvergelijking gaan we -- enigszins gekunsteld -- over op een nieuwe variabele $u = \frac{1}{r}$. (19)

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta} . \qquad (20)$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} . \dot{\theta} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\frac{L}{\mu r^2} = -\frac{L}{\mu}\frac{du}{d\theta} . \qquad (21)$$

Hierbij is gebruik gemaakt van formule (14) de perkenwet:

$$\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2} \quad . \tag{22}$$

$$\ddot{r} = -\frac{L}{\mu}\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{d\theta}\right) = -\frac{L}{\mu}\frac{d^2u}{d\theta^2} \cdot \dot{\theta} = -\frac{L^2}{\mu^2}u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} \quad . \tag{23}$$

Substitutie van (19), (22) en (23) in (18) geeft

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\gamma\mu}{L^2} \quad . \tag{24}$$

De algemene oplossing van deze differentiaalvergelijking is (vergelijk met de harmonische oscillator)

$$u = C\cos(\theta + \alpha) + \frac{\gamma\mu}{L^2} \quad \text{of} \quad \frac{1}{r} = C\cos(\theta + \alpha) + \frac{\gamma\mu}{L^2} \quad . \tag{25}$$

Hierbij zijn C en α integratieconstanten.

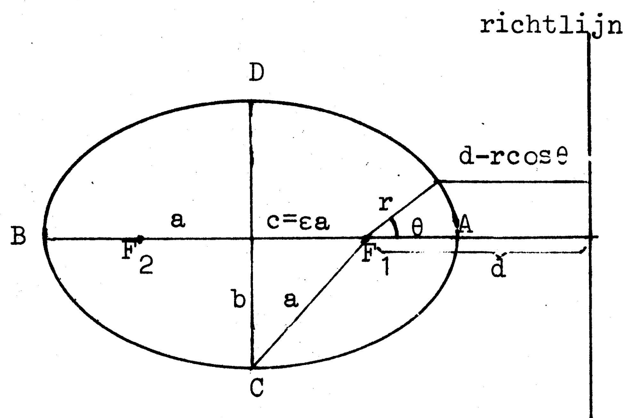
Door een nieuwe as te kiezen die een hoek $-\alpha$ maakt met de oude wordt uitdrukking (25)

$$r = \frac{1}{\frac{\gamma\mu}{L^2} + C\cos\theta} \tag{26}$$

Dit is de vergelijking van een kegelsnede in poolcoördinaten, hetgeen in de volgende paragraaf nader zal worden toegelicht.

VI.E. Kegelsneden

Een kegelsnede is een kromme beschreven door een punt dat zodanig beweegt dat de verhouding ε van zijn afstand tot een vast punt (het brandpunt) en tot een lijn (de richtlijn) constant is. Al naar gelang deze verhouding ε (de zogenaamde excentriciteit) kleiner dan, gelijk aan, of groter dan 1 is, hebben we te maken met respectievelijk een ellips, een parabool of een hyperbool.



$$\varepsilon = \frac{r}{d - r\cos\theta} \qquad (27)$$

volgens de definitie van kegelsnede

$\varepsilon < 1$: ellips

$\varepsilon = 1$: parabool

$\varepsilon > 1$: hyperbool

Uit (27) volgt als expliciete uitdrukking voor r:

$$r = \frac{\varepsilon d}{1 + \varepsilon\cos\theta} \qquad (28)$$

In de figuur hierboven is het geval van een ellips getekend.

Voor punt A ($\theta = 0$) is $r_A = \frac{\varepsilon d}{1 + \varepsilon}$ (29)

Voor punt B ($\theta = \pi$) is $r_B = \frac{\varepsilon d}{1 - \varepsilon}$ (30)

De lengte van de grote as van de ellips is $AB = 2a = r_A + r_B = \frac{2\varepsilon d}{1-\varepsilon^2}$ (31)

De lengte van de kleine as der ellips is $CD = 2b = 2a\sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{2\varepsilon d}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$ (32)

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} \qquad (33)$$

Het oppervlak van de ellips is $O = \pi ab = \pi a^2\sqrt{1 - \varepsilon^2}$ (34)

Een cirkel is een ellips met $\varepsilon = 0$; dan is $b = a$ en $O = \pi a^2$. (35)

Vergelijking van de formules (26) en (28) toont dus inderdaad aan dat de baan van het deeltje een kegelsnede is, waarbij een brandpunt het centrum van het krachtveld is. In het geval dat $\varepsilon < 1$ is, beschrijft het deeltje een ellipsbaan met het centrum van het krachtveld in één van de brandpunten. Dit is de eerste wet van Kepler.
De bekendste voorbeelden zijn de beweging van de aarde om de zon en die van de maan om de aarde.

Bij de beweging van de planeten om de zon wordt de baan van elke planeet gestoord door de aanwezigheid van andere planeten. Deze storingen kunnen met computers worden berekend en hebben het gevolg dat de ellipsbanen langzaam roteren om de zon (periheliumverschuiving) en dat de excentriciteit der ellipsbanen langzaam varieert om een gemiddelde waarde.

VI.F. Energie en Bindingstoestand

De totale energie van het pseudodeeltje μ in het centraal symmetrisch $\frac{1}{r^2}$ - krachtveld is

$$E_t = E_p + E_k = -\frac{\gamma}{r} + \tfrac{1}{2}\mu v^2, \tag{36}$$

waarbij r de afstand is van μ tot het krachtcentrum en v de snelheid van μ ten opzichte van ditzelfde centrum. Ontbinding van v in een r en een θ component (zie 11) geeft daar

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

$$E_t = -\frac{\gamma}{r} + \tfrac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \tfrac{1}{2}\mu r^2\dot{\theta}^2 \tag{37}$$

Eliminatie van $\dot{\theta}$ waarvoor geschreven kan worden $\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2}$ (zie verg. 14) geeft $E_t = -\frac{\gamma}{r} + \tfrac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2}$. (38)

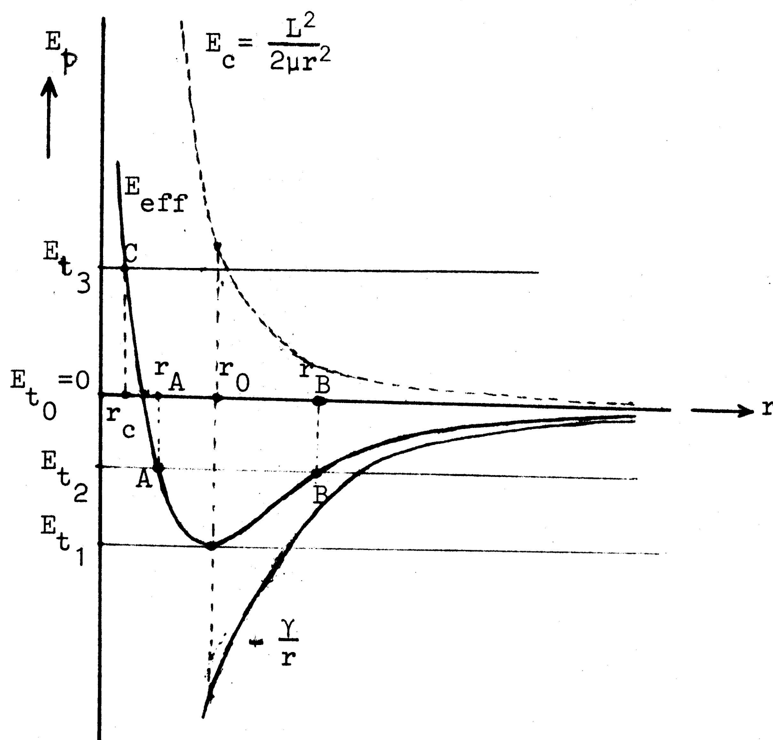
De derde term in (38) wordt de centrifugale potentiële energie $\boxed{E_c = \frac{L^2}{2\mu r^2}}$ genoemd omdat de kracht die hiermee samenhangt gelijk is (38a) aan $\vec{F}_c = -\,\text{grad}\,E_c = \frac{L^2}{\mu r^3}\vec{e}_r$. (39)

Deze kracht is van de oorsprong af gericht, het is dus een centrifugale kracht, die ervoor zorgt dat het deeltje niet willekeurig dicht bij het krachtcentrum komt, vandaar ook de naam centrifugaal-barrière. De energie is door vergelijking (38) uitgedrukt in r en $\dot{r}$, hetgeen te interpreteren is als de energie van een quasideeltje onder invloed van een effectieve potentiële energie

$$E_{eff} = -\frac{\gamma}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}\ . \tag{40}$$

De term $E_c = \frac{L^2}{2\mu r^2}$ kan ook opgevat worden als kinetische energie van rotatie. $\mu r^2 = I$, het traagheidsmoment van μ ten opzichte van het centrum. $\frac{L^2}{2\mu r^2} = \frac{L^2}{2I}$ (zie formule (28), pag. 87) (41)

Een grafisch verband tussen de verschillende energietermen en de afstand r is in de figuur hieronder getekend. De centrifugale potentiële energie is door de stippellijn aangegeven; het is een positieve energieterm. De gravitatieveldenergie $-\frac{\gamma}{r}$ is negatief. De som E_{eff} van deze twee termen is in de figuur getekend.



De centrifugale term is voor grote afstanden klein, maar neemt voor zeer kleine afstanden snel toe. Als de totale energie wordt gegeven door E_{t_1} zal het deeltje een cirkelbaan beschrijven met straal r_0; de kinetische energie is dan $\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 = 0$ daar $r = r_0$ constant is.

Het minimum van E_{eff} wordt bereikt voor $r = r_0 = \frac{L^2}{\mu\gamma}$. (42)

De waarde van E_{eff} in dit minimum is $E_{t_1} = -\frac{\gamma}{2r_0}$. (43)

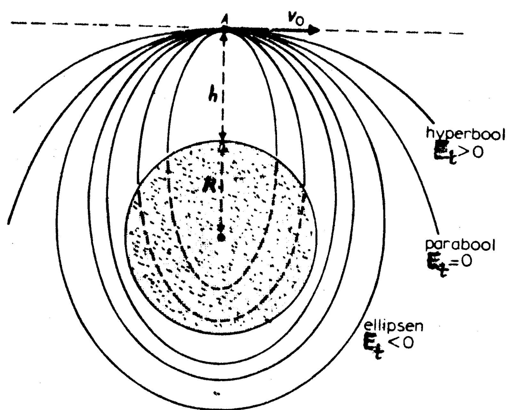
Als de totale energie E_{t_2} is, aangegeven door de lijn AB, zal de straal van de baan variëren tussen de minimale waarde r_A en de maximale waarde r_B en het deeltje zal een ellipsbaan beschrijven.

De kinetische energie $\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2$ is 0 in de omkeerpunten $r = r_A$ en $r = r_B$ en heeft de maximale waarde $E_{k_{max}} = E_{t_2} - E_{t_1}$. (44)

Als het deeltje tenslotte een totale energie $E_{t_3} \geqq 0$ heeft, zal het van het centrum wegvliegen, anders uitgedrukt het "dissocieert" van het krachtcentrum. De kleinste energie die aan het deeltje van buitenaf moet worden toegevoerd om vanuit de toestand E_{t_2} te dissociëren, is dus $-E_{t_2}$. Dit is een positieve grootheid, de dissociatie energie, die een belangrijke rol speelt bij de vorming en dissociatie van moleculen en de ionisatie van atomen en moleculen.

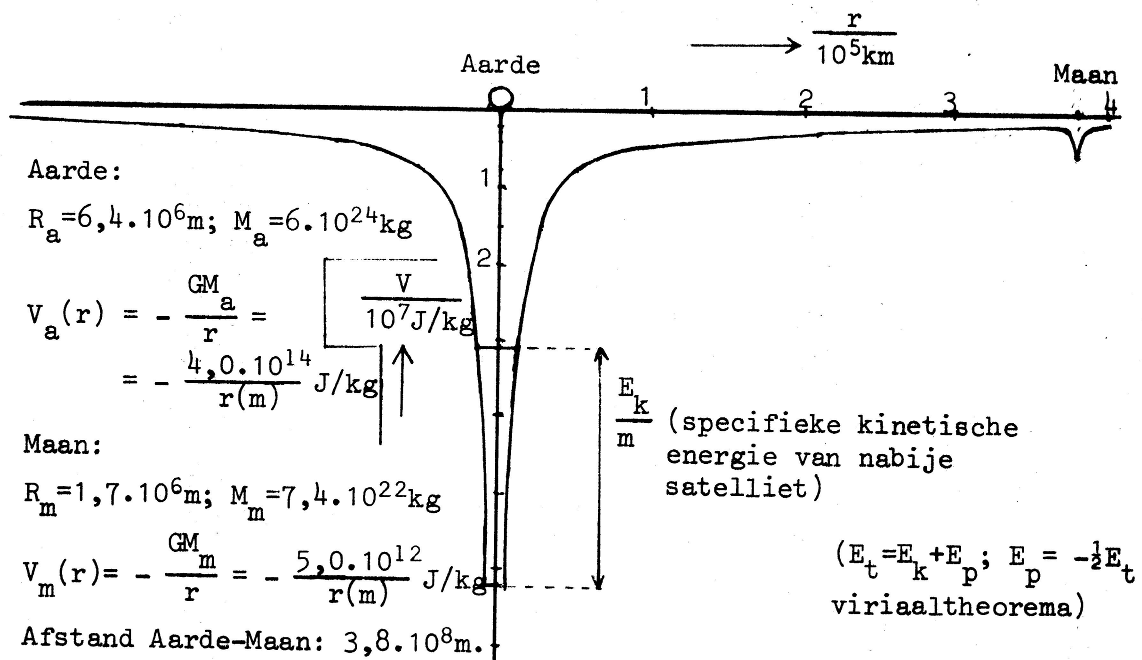
Als de totale energie $E_t < 0$ is, wordt gesproken van een gebonden toestand van het deeltje en de baan is een ellips. Indien $E_t > 0$, bijvoorbeeld de in de grafiek aangegeven waarde E_{t_3}, spreken we van een verstrooiingstoestand; het deeltje nadert dan het verstrooiingscentrum tot de afstand r_c en verdwijnt vervolgens naar het oneindige, waarbij het een hyperboolbaan beschrijft.

Als illustratief voorbeeld beschouwen we verschillende banen van een deeltje met massa m (ruimtevoertuig of kunstmaan) dat op een hoogte h boven het aardoppervlak horizontaal wordt weggeschoten met een snelheid v_0. Al naar gelang de totale energie E_t (formule (38)) negatief, nul of positief is, zal de baan een ellips (cirkel), parabool of hyperbool zijn met als brandpunt het centrum van de aarde. Als v_0 klein is, zal de ellips de aarde snijden, hetgeen betekent dat het deeltje op aarde valt. Ellipsbanen (inclusief de cirkelbaan) die de aarde niet snijden zijn stationaire toestanden of parkeerbanen van het deeltje.



De aardse ontsnappingssnelheid is de kleinste snelheid waarmee een deeltje van het aardoppervlak moet worden weggeschoten om buiten de attractiesfeer van de aarde te komen, dus in het oneindige. Bij een verticale baan gaat geen energie zitten in de rotatie (de centrifugaalterm is nul) en dan is $E_t = 0$ voor

$v_e = \sqrt{\frac{2\gamma}{\mu R}} \approx \sqrt{\frac{2GM}{R}}$. Daar $m << M$ is $\mu \approx m$. Hierbij is M de massa van de aarde, R de straal en G de gravitatieconstante. Substitutie van de numerieke waarden van G, M en R geeft $v_e \approx 11{,}3$ km/s, onafhankelijk van de massa van het deeltje waarbij de niet conservatieve afremming van het deeltje door de aardatmosfeer buiten beschouwing is gelaten. Het begrip ontsnappingssnelheid ligt ten grondslag aan het feit dat de aarde zwaardere gassen, die een kleinere moleculair-kinetische snelheid hebben dan lichtere gassen, langer kan vasthouden dan die lichtere gassen. Hiermee hangt ook samen dat mercurius geen dampkring (meer) heeft, net als de maan,



Gravitatiepotentiaal van het systeem aarde - maan.

mars een zeer ijle dampkring en jupiter en saturnus een enorme dampkring met ammoniak en methaan. In bovenstaande figuur is het gravitatiepotentiaalverloop tussen de aarde en de maan getekend. Uit deze grafiek is duidelijk te zien dat een maanvoertuig aan het begin van zijn reis vanaf de aarde het grootste deel van de attractie energie moet overwinnen. In de hiervoor behandelde gevallen is de waarde van γ positief verondersteld wat correspondeert met een aantrekkende kracht.
Als $\gamma < 0$ is, zullen er in het geheel geen gebonden toestanden zijn omdat E_{eff} dan voor geen enkele waarde van r negatief is.

Er dient nogmaals de aandacht op te worden gevestigd dat het tweedeeltjesprobleem is herleid tot twee afzonderlijke bewegingen:

1e. De beweging van een deeltje met massa $M = m_1 + m_2$ met de snelheid van het zwaartepunt $\dot{\vec{r}}_z$: de zwaartepuntsbeweging.

2e. De beweging van een pseudodeeltje met gereduceerde massa μ in een centraalsymmetrisch krachtveld. In het voorgaande en het volgende betoog houden we ons alleen met de tweede beweging bezig.

VI.G. Algemene Gravitatiebeweging: Eerste Wet van Kepler

In § VI.F werd een uitdrukking voor de totale energie E_t gegeven (formule (36)) waarbij voor de potentiële energie de uitdrukking $E_p = -\frac{\gamma}{r}$ gebruikt werd.
We laten nu de r-afhankelijkheid van E_p nog even in het midden en we formuleren de totale energie als

$$E_t = E_p + \tfrac{1}{2}\mu v^2. \qquad (45)$$

Op analoge wijze als in § VI.F wordt v in componenten gesplitst, zodat

$$E_t = E_p + \tfrac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} \qquad (46)$$

waarbij ook weer gebruik gemaakt is van de perkenwet:

$\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2}$. Nu is met (46) $\dot{r}$ expliciet te (47)

formuleren als: $\dot{r} = \{\frac{2}{\mu}(E_t - E_p - \frac{L^2}{2\mu r^2}\}^{\frac{1}{2}}$ (48)

Deling van (48) door (47) geeft

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\{\frac{2}{\mu}(E_t - E_p - \frac{L^2}{2\mu r^2}\}^{\frac{1}{2}}}{\frac{L}{\mu r^2}} \tag{49}$$

De vergelijking van een kegelsnede in poolcoördinaten met een brandpunt

als oorsprong is (zie formule 28, pag. 127) $r = \frac{\varepsilon d}{1 + \varepsilon\cos\theta}$ (50)

Differentiatie van r naar θ geeft

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon d}{(1 + \varepsilon\cos\theta)^2}\,\varepsilon\sin\theta = \frac{r^2\sin\theta}{d} \;. \tag{51}$$

Uit de gelijkstelling van de rechterleden van (49) en (51) volgt dan

$$\sin^2\theta = \frac{d^2\mu^2}{L^2}\left\{\frac{2(E_t - E_p)}{\mu} - \frac{L^2}{\mu^2 r^2}\right\} \;. \tag{52}$$

Uit (50) volgt: $\cos\theta = \frac{d}{r} - \frac{1}{\varepsilon}$ dus $\sin^2\theta = 1 - \frac{d^2}{r^2} + \frac{2d}{\varepsilon r} - \frac{1}{\varepsilon^2}$ (53)

Combinatie van (52) en (53) geeft

$$1 + \frac{2d}{\varepsilon r} - \frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{2d^2\mu E_t}{L^2} - \frac{2d^2\mu E_p}{L^2} \;. \tag{54}$$

E_t is constant en onafhankelijk van r, terwijl E_p een functie van r is. Als verg. (54) voor alle waarden van r juist moet zijn, valt deze vergelijking in twee vergelijkingen uiteen:

$$\frac{2d}{\varepsilon r} = -\frac{2d^2\mu E_p}{L^2} \quad \text{of} \quad E_p = -\frac{L^2}{\varepsilon\mu d r} \quad \text{en} \tag{55}$$

$$1 - \frac{1}{\varepsilon^2} = \frac{2d^2\mu E_t}{L^2} \quad \text{of} \quad E_t = \frac{L^2}{2\mu d^2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^2}\right). \tag{56}$$

Uit (55) volgt dat de baan een kegelsnede is op voorwaarde dat de potentiële energie E_p omgekeerd evenredig is met de afstand r van het deeltje tot het brandpunt van de kegelsnede.

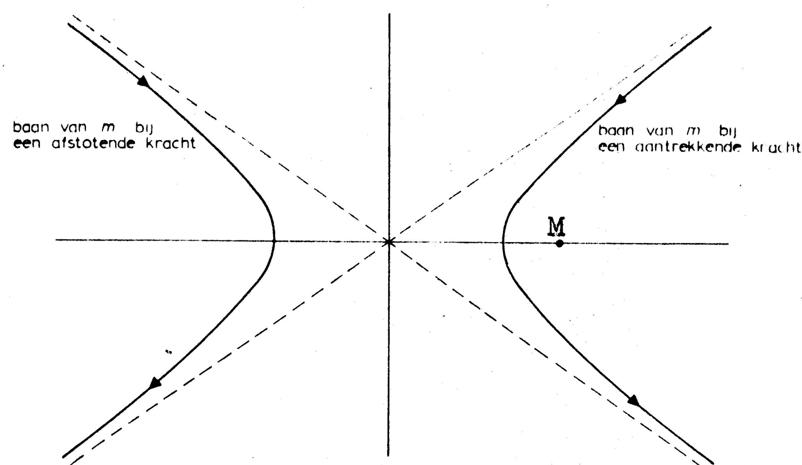
Deze formulering houdt tevens een generalisatie in van de eerste wet van Kepler, waarbij niet alleen ellipsen maar ook parabolen en hyperbolen mogelijke banen zijn.

De vorm van de baan hangt van de waarde van ε af en (56) geeft dan tevens het teken van de totale energie E_t.

Als	$\varepsilon > 1$	is, dan	$E_t > 0$	en de baan is een hyperbool
	$\varepsilon = 1$	dan	$E_t = 0$	en de baan is een parabool
	$\varepsilon < 1$	dan	$E_t < 0$	en de baan is een ellips

Dit is geheel in overeenstemming met hetgeen in § VI.F is behandeld. De ellipsen corresponderen met gebonden toestanden en de hyperbolen en parabolen met verstrooiingstoestanden.

Nu heeft een hyperbool twee takken en de fysische betekenis hiervan is dat bij een $\frac{1}{r^2}$ aantrekkende kracht de tak om het krachtcentrum wordt beschreven, terwijl bij een $\frac{1}{r^2}$ afstotende kracht de andere tak wordt doorlopen (zie figuur).



Overeenkomstig de redenering van deze paragraaf heeft Newton de $\frac{1}{r^2}$-gravitatiewet afgeleid uit de eerste wet van Kepler, die langs empirische weg door Kepler was gevonden.

VI.H. Verband tussen Baan, Energie en Impulsmoment

Een uitdrukking voor de totale energie is formule (56) op

pag. 133 : $E_t = \frac{L^2}{2\mu d^2}(1 - \frac{1}{\varepsilon^2})$ (56)

Met de waarde voor de halve grote as van de ellips $a = \frac{\varepsilon d}{1 - \varepsilon^2}$

(formule 31) kunnen we E_t schrijven als

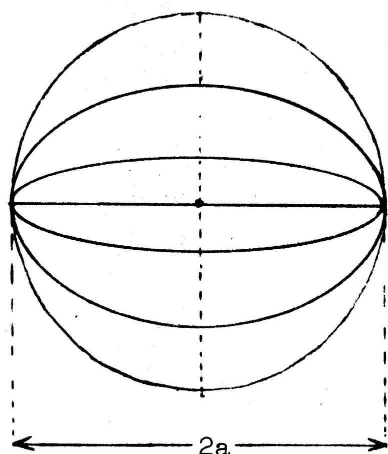
$$E_t = - \frac{L^2}{2\varepsilon d\mu a} \;. \qquad (57)$$

Combinatie van (55) en (57) geeft

$E_t = E_p \cdot \frac{r}{2a}$ (58) en daar $E_p = \frac{-\gamma}{r}$ is, wordt (58)

de uitdrukking voor de totale energie $E_t = - \frac{\gamma}{2a}$. (59)

Deze formule laat zien dat de totale energie alleen afhangt van de grote as van de ellips maar niet van de kleine as.
Verschillende banen met dezelfde grote as en verschillende excentriciteit (zie figuur) hebben dezelfde energie als de cirkelbaan met straal a.



Uit (57) en (59) volgt

$$L^2 = \varepsilon d\mu\gamma \;. \qquad (60)$$

Substitutie van de waarde voor εd uit formule (31) geeft

$$L^2 = \mu\gamma a(1 - \varepsilon^2). \qquad (61)$$

Door uit de vergelijkingen (59) en (61) a te elimineren, resulteert als uitdrukking voor de excentriciteit

$$\varepsilon = (1 + \frac{2E_t L^2}{\mu\gamma^2})^{\frac{1}{2}} \qquad (62)$$

De excentriciteit hangt dus af van de totale energie en het impulsmoment.

Uit het bovenstaande volgt dus dat in een veld met een $\frac{1}{r^2}$ attractiekracht bij een gegeven totale energie vele toestanden met verschillend impulsmoment kunnen optreden. De grootste waarde van het impulsmoment treedt op als $\varepsilon = 0$, dat wil zeggen voor de cirkelbaan; dan is

$$L = \gamma\sqrt{\frac{\mu}{2E_t}} \quad . \qquad (63)$$

Hoe smaller de ellips is, des te kleiner is het impulsmoment. Het feit dat de grootte van de baan (grote as van de ellips) bepaald wordt door de totale energie en de vorm van de baan (excentriciteit) door het impulsmoment is van grote betekenis in de kern-, atoom- en molecuulfysica.

VI.I. De Derde Wet van Kepler

Het oppervlak van een ellips is volgens formule (34), pag. 127:

$$O = \pi a^2(1 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}. \qquad (64)$$

Met behulp van de perkenwet (formule 12, pag. 124) $r^2\dot{\theta} = \frac{L}{\mu}$ is het oppervlak van de ellips ook uit te rekenen:

$$O = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \frac{L}{2\mu}\int_0^T dt = \frac{LT}{2\mu} \quad , \qquad (65)$$

waarbij T de periode van de baan is. Eliminatie van O uit (64) en (65) geeft

$$\pi^2 a^4(1 - \varepsilon^2) = \frac{L^2T^2}{4\mu^2} \quad . \qquad (66)$$

Eliminatie van L uit (61) en (66) geeft $T^2 = \frac{4\pi^2\mu}{\gamma} \cdot a^3$ (67)

De verhouding $\frac{\mu}{\gamma}$ volgt door deling van (6a) door (6b):

$$\frac{\mu}{\gamma} = \frac{1}{G(m_1 + m_2)} \cdot (68) \qquad \text{Dus is} \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} \cdot (69) \qquad (68\text{-}69)$$

Als de massa van het attractiecentrum m_1 veel groter is dan de massa van één (m_2) of meer deeltjes is de waarde van $m_1 + m_2$ voor deeltjes met verschillende massa m_2 vrijwel constant. Voor die deeltjes geldt dan -- onder verwaarlozing van hun onderlinge wisselwerking -- dat de kwadraten van de omloopperiodes zich verhouden als de derde machten van de halve grote as van de ellipsen. Dit is de derde wet van Kepler.

FYSISCH LABORATORIUM
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT

December 1972.

OVERZICHT KLASSIEKE MECHANICA

Kinematica van één deeltje

Ontbinding van snelheid en versnelling in componenten met variabele richting ($\dot{\vec e}=\vec\omega\times\vec e$):

1. radiaal en transversaal: $\vec v=\dot r\vec e_r+r\dot\theta\vec e_\theta$ en $\vec a=(\ddot r-r\dot\theta^2)\vec e_r+(r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta)\vec e_\theta$.
2. normaal en tangentieel: $\vec v=v\vec e_t$ en $\vec a=\dot v\vec e_t+\frac{v^2}{\rho}\vec e_n$.

   eenparig versnelde translatie: $\vec v=\vec v_0+\vec a t$; $\vec r=\vec r_0+\vec v_0 t+\frac12\vec a t^2$.

   eenparig versnelde rotatie om vaste as: $\omega=\omega_0+\alpha t$; $\theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac12\alpha t^2$.

Transformaties. 1. bij eenparige translatie: $\vec V'=\vec V-\vec v$; $\vec a'=\vec a$ (Galilei).
2. bij eenparig versnelde translatie: $\vec a'=\vec a-\vec a_0$.
3. bij eenparige rotatie: $\vec V'=\vec V-\vec\omega\times\vec r$; $\vec a'=\vec a-2\vec\omega\times\vec V'-\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r)$.

Dynamica van één deeltje

$\vec F=\dot{\vec p}$; $\vec F_{12}=-\vec F_{21}=-G(m_1m_2/r_{12}^2)\vec e_{12}$ (Newton). $\int_{t_1}^{t_2}\vec F dt=\vec p_2-\vec p_1$. Krachtmoment $\vec M=\vec r\times\vec F$; koppel $\vec K=\vec r_{12}\times\vec F$; impulsmoment $\vec J=\vec r\times\vec p$. $\vec M=\dot{\vec J}$; $\int_{t_1}^{t_2}\vec M.dt=\vec J_2-\vec J_1$.

Schijnkrachten. $\vec F+\vec F_s=m\vec a'$ met $\vec F_s=-m\vec a_0$ in een stelsel dat met versnelling $\vec a_0$ beweegt t.o.v. een inertiaalstelsel. $\vec F+\vec F_{Cor}+\vec F_{cf}=m\vec a'$ met $\vec F_{Cor}=-2m\vec\omega\times\vec V'$ en $\vec F_{cf}=-m\vec\omega\times(\vec\omega\times\vec r)$ in een stelsel dat met hoeksnelheid $\vec\omega$ roteert t.o.v. een inertiaalstelsel.

Wrijving. $F_w=fN$ bij glijdende of statische wrijving; $F_w=-\beta v$ bij "stromende" wrijving.

Arbeid en energie. $\vec F.d\vec r=dE_k=-dE_p$ voor een conservatief krachtveld, d.w.z. als $\oint\vec F.d\vec r=0$; $\vec F=-\text{grad}E_p$; $E_p+E_k=C$. Vermogen. $P=\vec F.\vec v$. $E_k=\frac12 mv^2=p^2/2m$. Statica. $\sum_i\vec F_i=0$ of $\sum_i\vec F_i.\delta\vec r=0$ of $\delta E_p=0$.

Harmonische oscillator.

1. vrij en ongedempt: $m\ddot x+kx=0$; $x=A\sin(\omega_0 t+\alpha)$; $\omega_0=(\frac{k}{m})^{\frac12}$.

   Superpositie van twee harmonische trillingen met a) dezelfde trillingsrichting en ω: interferentie; b) dezelfde trillingsrichting maar ω verschillend: amplitude-modulatie; c) loodrechte trillingsrichtingen, dezelfde ω: polarisatie; d) loodrechte trillingsrichtingen, verschillende ω: Lissajous figuren.

2. vrij en gedempt: $m\ddot x+\beta\dot x+kx=0$. a) overaperiodiek $\beta^2>4km$; $x(t)=Ae^{\lambda_1 t}+Be^{\lambda_2 t}$ met $\lambda_{1,2}=-\frac{\beta}{2m}\pm(\frac{\beta^2}{4m^2}-\frac{k}{m})^{\frac12}$. b) aperiodiek of kritiek gedempt $\beta^2=4km$; $x(t)=(A+Bt)e^{-\frac{\beta}{2m}t}$. c) periodiek $\beta^2<4km$; $x(t)=De^{-\frac{\beta}{2m}t}\cos(\omega_1 t+\theta)$ met $\omega_1=(\omega_0^2-\frac{\beta^2}{4m^2})^{\frac12}$.

3. gedwongen en gedempt. a) constante kracht F_0; sprongkarakteristiek met $u=x-\frac{F_0}{k}$.

   b) krachtstoot $\int_{\Delta t}\vec F dt$; bij kritieke demping is $x_{max}=\frac{2}{e\beta}\int_{\Delta t}F dt$ (ballistische geval).

   c) periodieke uitwendige kracht $F_0\cos\omega t$. Dan is $x(t)=x_{tr}+x_{st}$.

   $x_{tr}=De^{-\frac{\beta}{2m}t}\cos(\omega_1 t+\theta)$; $x_{st}=\frac{F_0\cos(\omega t-\phi)}{\{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+\beta^2\omega^2\}^{\frac12}}$ met $\phi=\text{arctg}\frac{\beta\omega}{m(\omega_0^2-\omega^2)}$,

   het faseverschil tussen kracht en uitwijking. Amplituderesonantie bij $\omega=(\omega_0^2-\frac{\beta^2}{2m^2})^{\frac12}$; dan is $A_r=F_0/\beta\omega_1$.
   Snelheidsresonantie bij $\omega=\omega_0=(\frac{k}{m})^{\frac12}$; dan is $A_r=\frac{F_0}{\beta\omega_0}$ en $\dot x_{A,r}=\frac{F_0}{\beta}$.

   Het gemiddeld gedissipeerde vermogen is

   $\overline{P}=\overline{\dot W}=\frac{F_0^2}{2\beta}\cos^2\gamma=\frac12\dot x_A^2.\beta$, maximaal als γ (faseverschil tussen kracht en snelheid) = 0, dat is bij snelheidsresonantie.

Mechanica van een systeem van deeltjes

Zwaartepunt $\vec{r}_z = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}$; $\vec{P} = M\vec{v}_z$; $\dot{\vec{P}} = M\vec{a}_z = \sum_i \vec{F}_i^{\,e}$; alleen voor twee deeltjes is $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.
$\dot{\vec{J}} = \vec{M}^e$; $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$; $\dot{\vec{L}} = \vec{r}_z \times \dot{\vec{P}} = \vec{r}_z \times \sum_i \vec{F}_i^{\,e}$; $\dot{\vec{S}} = \sum_i \vec{r}_i^{\,z} \times \vec{F}_i^{\,e} = \vec{M}^{ez}$. $E_k + E_p^{\,i} + E_p^{\,e} = C$ voor conservatieve in- en uitwendige krachten. $E_k = E_k^{\,z} + \frac{1}{2} M v_z^2$; voor twee deeltjes is $E_k^{\,z} = \frac{1}{2}\mu v_{12}^2$.

Botsingen. behoud van impuls: $m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$; restitutie coëff. $c_r = \frac{|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|}{|\vec{u}_2 - \vec{u}_1|}$

voor volkomen elastische botsingen is $c_r = 1$ en blijft de kin. energie behouden:
$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$.

Gekoppelde oscillatoren. normale frequenties $\omega_1 = (\frac{k}{m})^{\frac{1}{2}}$ en $\omega_2 = (\frac{k+2f}{m})^{\frac{1}{2}}$.

Starre continua. zwaartepunt $\vec{r}_z = \frac{\int \vec{r}\,dm}{M}$.

Statica. $\sum_i \vec{F}_i = 0$; $\sum_i \vec{M}_i = 0$.

Rotatie om een vaste (symmetrie) as. $\vec{J} = I\vec{\omega}$; $I = \sum_i m_i r_i^2$ of $I = \int r^2 \rho \, dV$; $\vec{M} = \dot{\vec{J}} = \frac{d}{dt}(I\vec{\omega})$.

Als I constant is, geldt $\vec{M} = I\vec{\alpha}$. Regel van Steiner $I = I_z + Ma^2$. Kinetische energie van een star lichtaam dat zowel in translatie als in rotatie is $E_k = \frac{1}{2} M v_z^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$.
$I_{z\ cyl} = \frac{1}{2} mR^2$; $I_{z\ bol} = \frac{2}{5} mR^2$; $I_{z\ lat} = \frac{1}{12} ml^2$.

Arbeid $W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \vec{M} . d\vec{\theta} = \frac{1}{2} I (\omega_2^2 - \omega_1^2) = E_{pr}(\theta_1) - E_{pr}(\theta_2)$ voor conservatieve systemen.

Voor zulke systemen geldt voor gecombineerde translatie en rotatie $E_{kt} + E_{pt} + E_{kr} + E_{pr} = C$.
Harmonische rotator vrij en gedempt: $I\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + D\theta = 0$. Oplossing volkomen analoog aan die van harmonische oscillator. Fysische slinger (vrij en ongedempt) $I\ddot{\theta} + Mgl\theta = 0$, geldt voor kleine uitwijkingen. $\omega_0 = (\frac{Mgl}{I})^{\frac{1}{2}}$. equivalente slingerlengte $l_0 = \frac{I}{Ml}$.

Rotatie om een veranderlijke as. $\vec{J} = \iota\vec{\omega}$, traagheidstensor ι. Bij rotatie om één van de hoofdtraagheidsassen is de rotatie vrij en hebben $\vec{J}$ en $\vec{\omega}$ dezelfde richting, bijv. $\vec{J} = \vec{i} J_x = \vec{i} I_x \omega_x$ met I_x het hoofdtraagheidsmoment t.o.v. de x-as die een hoofdtraagheidsas is. Als de traagheidstensor gediagonaliseerd is, geldt
$\vec{J} = \vec{i} I_x \omega_x + \vec{j} I_y \omega_y + \vec{k} I_z \omega_z$ en is de kinetische energie

$$E_k = \frac{1}{2}\left(\frac{J_x^2}{I_x} + \frac{J_y^2}{I_y} + \frac{J_z^2}{I_z}\right) = \frac{1}{2}(I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2).$$

Vergelijkingen van Euler $M_x = I_x \dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z (I_z - I_y)$ en analoog voor de y- en z-component.

Precessie: $\vec{M} = \dot{\vec{J}} = \vec{\Omega} \times \vec{J}$.

Dr. H. Nauta.

$\delta = \frac{2\pi\beta}{\omega 2 m} = \frac{\pi\beta}{m\omega}$

$Q = \frac{\pi}{\delta}$

Opgaven, behorend bij het college Mechanica voor eerstejaars door Dr.H.Nauta

1972 - 1973

1. a) Geef de dimensie en de eenheid van de volgende grootheden, uitgedrukt in de dimensies van de grootheden lengte, massa, tijd en stroomsterkte en de eenheden m, kg, s en A:
kracht, arbeid, moment van het koppel, vermogen, lading, elektrische spanning, de permittiviteit van het vacuum (ε_o) uit de wet van Coulomb
($|\vec{F}| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{Q_1Q_2}{r^2}$) en de coëfficiënt van zelfinductie, de vicositeits-coëfficiënt η uit de formule van Stokes $\vec{F} = -6\pi\eta r\vec{v}$. $\vec{F}$ is de kracht die op een bol met straal r en snelheid $\vec{v}$ in een visceuze vloeistof wordt uitgeoefend.

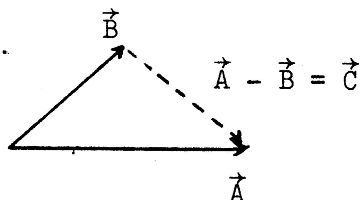
b) Onderzoek door dimensiecontrole welke van de volgende formules beslist fout is:
De doorbuiging y van een dunne staaf met lengte L, onder invloed van een kracht F loodrecht op het uiteinde van de staaf uitgeoefend wordt gegeven door:

$y = \frac{F.L^3}{3.E.I_g}$ of misschien door: $y = \frac{F.L^2}{3.E.I_g}$

Hierin is: $I_g = \frac{1}{12} a^4$ voor een staaf met vierkante doorsnede a^2, het zg. geometrische traagheidsmoment,
E de elasticiteitsmodulus van het materiaal van de staaf.
E heeft de dimensie van $\frac{\text{kracht}}{[l]^2}$.

2. Bewijs dat de som $\vec{S}$ van de vectoren $\vec{A}_1, \vec{A}_2 \ldots\ldots \vec{A}_i \ldots \vec{A}_n$ een absolute waarde S heeft, gegeven door:

$$S^2 = \vec{A}_1^{\,2} + \vec{A}_2^{\,2} + \ldots\vec{A}_n^{\,2} + 2\vec{A}_1\vec{A}_2 + 2\vec{A}_1\vec{A}_3 + \ldots\ldots = \Sigma_i\Sigma_j\vec{A}_i.\vec{A}_j$$

3. 

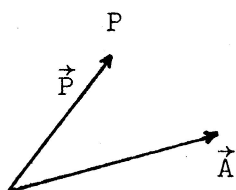
Toon aan, dat de z.g. cosinusregel van de driehoek kan worden teruggevonden door de vergelijking $\vec{A} - \vec{B} = \vec{C}$ te kwadrateren (zie figuur).

4. a) Bewijs dat twee vectoren $\vec{A}$ en $\vec{B}$ loodrecht op elkaar staan indien:

$$\vec{A}^2 + \vec{B}^2 = \vec{C}^2 \quad \text{en}$$
$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$$

b) Ook als $|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$, staan $\vec{A}$ en $\vec{B}$ loodrecht op elkaar.
Bewijs dit.
Bewijs ook het omgekeerde van deze stelling.

5.



Geef de vectorvergelijking van een vlak dat loodrecht op een vector $\vec{A}$ staat en door een punt P gaat, waarvan de radiusvector $\vec{P}$ is (zie figuur).
Aanwijzing: Noem de radiusvector van een willekeurig punt van het gevraagde vlak $\vec{R}$ en zoek een voorwaarde voor $\vec{R} - \vec{P}$.

6. Het zwaartepunt Z , met radiusvector $\vec{Z}$, van een stelsel massapunten m_1, m_2 .....m_i..... met radiusvectoren $\vec{R}_i$ t.o.v. een zekere oorsprong 0, is gedefinieerd door

$$\vec{Z} = \frac{\Sigma_i m_i \vec{R}_i}{\Sigma_i m_i}$$

Laat zien dat de plaats van Z niet van de keuze van 0 afhangt.

7. a) Zoek uitdrukkingen voor $\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C})$ en $(\vec{A} \times \vec{B}).\vec{C}$.
Is er verschil?

b) Zoek de uitdrukkingen voor $(\vec{C} \times \vec{A}).\vec{B}$ en vergelijk deze met de gevonden uitdrukkingen van 8b.

Aanwijzing: gebruik voor de producten van 7a) en 7b) de determinantvorm.

8. *a) Is er verschil tussen de vectorproducten $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$ en $(\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$?
Geldt voor dit uitproduct dus de associatieve eigenschap?
Bewijs, dat $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}\ (\vec{A}\vec{C}) - \vec{C}\ (\vec{A}\vec{B})$.

*b) Ga na, dat uit $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \times \vec{C}$ volgt ($\vec{A}$,$\vec{B}$ en $\vec{C} \neq 0$): $\vec{B} \times (\vec{A} \times \vec{C}) = 0$
waaruit volgt: óf $\vec{C} = \alpha\vec{A}$
óf $\vec{A} \perp \vec{B}$ en $\vec{C} \perp \vec{B}$.

9.a) Bewijs dat de inhoud van een parallelopipedum beschreven op de vectoren $\vec{A}$, $\vec{B}$ en $\vec{C}$ als zijden gelijk is aan de absolute waarde van $\vec{A}.(\vec{B} \times \vec{C})$.

Bewijs de volgende stellingen met behulp van vector-algebra:

b) In een ruit zijn de diagonalen orthogonaal;

c) In een Δ is de lijn, die de middens van twee zijden verbindt, evenwijdig aan en de helft van de andere zijde;

d) De omtrekshoek, beschreven op de middellijn van een cirkel, is recht.

10. Leid uit de relaties voor vectorproducten van drie vectoren af, dat:
$(\vec{A} \times \vec{B}).(\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A}.\vec{C}).(\vec{B}.\vec{D}) - (\vec{A}.\vec{D})(\vec{B}.\vec{C})$.
Dit kan op twee manieren: door uitschrijven in componenten of door toepassing van bekende betrekking en tussen vectoren, zoals de uitkomst van 7 en 8a

11. Een kogelbaan is gegeven door:

$$y = v_o t - \tfrac{1}{2}gt^2$$
$$x = w_o t$$

v_o en w_o zijn de snelheden op t = 0 in de y-resp. x-richting. We willen de tangentiële en de normale versnelling bestuderen als functie van de tijd. We weten dat de enige kracht die op de kogel werkt de zwaartekracht is, zodat de totale versnelling steeds $\vec{g}$ is.

a) Het is niet moeilijk om de richting van de snelheid te bepalen, zodat de tangentiële en de normale versnelling gemakkelijk hieruit te berekenen zijn. Doe dit.

b) Voor welke waarden van x is $\vec{a}_n$ maximaal?
Hoe groot is $\vec{a}_n$ dan? Hoe groot is $\vec{a}_{tg}$ in dit punt?

c) Bereken de baankromming k in het punt, waar deze het grootst is.
De kromming k = 1/R, waarin R de kromtestraal is.

d) Zoek een uitdrukking voor de kromtestraal als functie van de tijd.

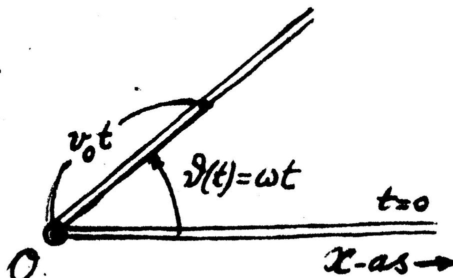
12. Leid zelf af, dat als een 2-dimensionale beweging in poolcoördinaten gegeven is door r(t) en θ(t), de versnelling $\vec{a}$ gegeven is door:

$$\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta \qquad \text{(dictaat blz. 15)}$$

Geef in enkele regels aan uit welke onderdelen dit bewijs is opgebouwd.

B.v. 1e stap: Bewijs $\vec{e}.\dot{\vec{e}} = 0$ uit $\vec{e}.\vec{e} = 1$
2e stap: Bereken $\vec{v}$ door differentiatie van $\vec{r} = r(t).\vec{e}_r$
→ 3e stap: Hierin komt $\dot{\vec{e}}_r$ voor. Deze is $\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ (dit uit figuur!).
4e stap: Differentieer $\vec{v}$ (2e stap) naar de tijd. Hierin komt $\dot{\vec{e}}_\theta$ voor.
5e stap: enz.

13.



Een massapunt kan in een buis bewegen, die met een eenparige hoeksnelheid ω draait om een verticale as door 0, loodrecht op het vlak van tekening. Op t = o ligt de buis langs de pos. X-as en is het massapunt in 0 (zie fig.)

Terwijl de buis draait loopt dit punt met eenparige snelheid v_o in de buis.

a) Hoe luidt de baanvergelijking (r als functie van θ)?

b) Bereken de azimutale en de radiële versnelling als functie van de tijd.

c) Daar het punt een massa m heeft en een versnelling moet er een kracht op werken, die ontbonden kan worden in de buis richting en loodrecht daarop.
Bereken beide componenten van deze kracht (F_r en F_θ).

d) Een van deze componenten is van de tijd afhankelijk, de andere is constant.
Welke bewegingvergelijkingen beschrijven de baan van het massapunt als men het tijdafhankelijke deel van de kracht weglaat?
Is bij deze beweging de ~~tangent~~iële azimutale component van de kracht tijdafhankelijk? Licht Uw antwoord toe. ω konstant $r_0 = a$ $\dot{r}(0) = 0$

14. Een waarnemer bevindt zich in een cartesisch coördinatenstelsel XYZ met oorsprong 0 en beschrijft in dat systeem een beweging door:
$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$, x, y en z hangen van de tijd af.
Voor de tijdsafgeleide van deze vector geldt:

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{bew.} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}.$$

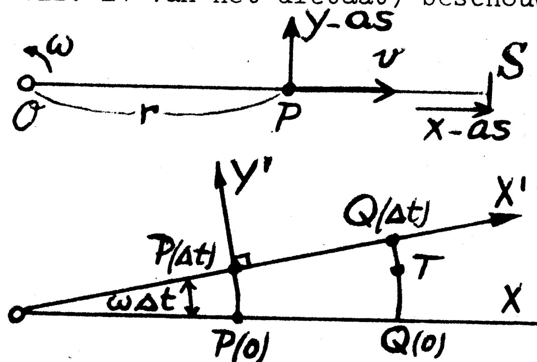
Later ontdekt de waarnemer dat zijn systeem een willekeurige beweging heeft t.o.v. een ander coördinatenstelsel X'Y'Z' met dezelfde oorsprong 0. Hij vraagt zich af hoe een waarnemer in het X'Y'Z'-stlsel een tijdsafgeleide van $\vec{r}$ zou beschrijven. Voor de waarnemer in het X'Y'Z'-stelsel zijn de eenheidsvectoren $\vec{i}$, $\vec{j}$ en $\vec{k}$ tijdsafhankelijk, zodat hij in zijn eigen stelsel voor de tijdsafgeleide van $\bar{r}$ schrijft:

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{stilst.} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}$$

$$\text{of } \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{stilst.} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{bew.} + \left(x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dx} + z\frac{d\vec{k}}{dt}\right)$$

Daar $\vec{i}$ een eenheidsvector uit 0 is, zal $\frac{d\vec{i}}{dt}$ loodrecht staan op $\vec{i}$ (waarom?) en dus evenwijdig zijn aan het vlak door $\vec{j}$ en $\vec{k}$. $\frac{d\vec{i}}{dt}$ is dus te schrijven als een lineaire combinatie van $\vec{j}$ en $\vec{k}$: $\frac{d\vec{i}}{dt} = A_1\,\vec{j} + A_2\,\vec{k}$; voor $\frac{d\vec{j}}{dt}$ en $\frac{d\vec{k}}{dt}$ gelden soortgelijke uitdrukkingen. Bewijs nu, gebruik makend van $\vec{i}.\vec{j} = 0$ enz., dat de uitdrukking $\left(x\,\frac{d\vec{i}}{dt} + y\,\frac{d\vec{j}}{dt} + z\,\frac{d\vec{k}}{dt}\right)$ geschreven kan worden als $\vec{\omega}\times\vec{r}$, waarbij $\vec{\omega}$ uitgedrukt kan worden in A_1, A_2, en A_3. Zijn deze laatste grootheden i.h.a. wèl of niet afhankelijk van de tijd? Realiseer je dat uit het voorgaande volgt, dat een willekeurige beweging van een Cartesisch coördinatenstelsel (dat de oorsprong 0 gemeen heeft met een ander Cartesisch stelsel) t.o.v. dit laatste beschreven kan worden als een momentane rotatie om een as door 0.

15. Om een idee te krijgen van de Coriolis-versnelling (formule 42 op blz. 21 van het dictaat) beschouwen we het volgende probleem.



Op een horizontale schijf die met een constante hoeksnelheid ω om een verticale as door 0 draait, zit een schutter in P op een afstand r van 0. Op de lijn OP bevindt zich een schietschijf S (zie fig.). Op t = o schiet de schutter in de richting PS. Zijn kogel heeft een beginsnelheid v. We zijn geintereseerd in de plaats waar de kogel zich een korte tijd later Δt later bevindt t.o.v. de coördinaten systemen zowel van een stilstaande, als van een met de schijf meebewegende waarnemer.

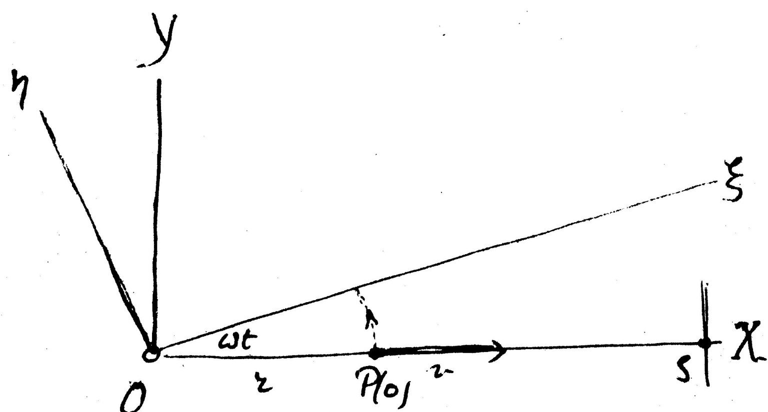
a) Geef de plaats T van de kogel op Δt in twee Cart.-coördinaatsystemen met P(0), resp. P(Δt) als oorsprong en OP(0), resp. OP(Δt) als assen.

b) Bereken uit de gevonden uitdrukking voor de y'-coördinaat de Coriolis-versnelling.

Verbeterde versie
vraagst. 15 (Mech.)

---

15. Om een idee te krijgen v.d. Coriolis-versnelling (formule 64 op blz. 27 van het diktaat), beschouwen we de volgende situatie (zie figuur).



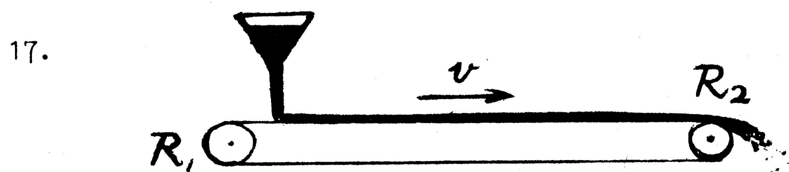
Op een horizontale schijf, die met een constante hoeksnelheid ω om een verticale as door O draait, zit een schutter in P (OP = r).
Op OP bevindt zich een schietschijf S. Op t = 0 schiet de schutter in de richting PS. Zijn kogel heeft een beginsnelheid v.

a) Bereken waar de kogel zich op tijd t bevindt in het (X, Y) stelsel en in het (ξ, η) stelsel.

b) Bereken uit de gevonden uitdrukking voor de η-coördinaat door tweemaal differentiëren de versnelling in de η-richting. Laat zien dat voor t = 0 hier de Coriolisversnelling (−2ω.v) uitkomt.

16. Een brandslang spuit water met een snelheid van 5 m/s loodrecht tegen een verticale muur. Het water druipt verticaal langs de muur naar beneden. Er komt per seconde 50 kg water uit de slang.
Hoe groot is de kracht op de muur?
Welke kracht ondervindt de brandweerman die de slang vasthoudt?

17.



Op een lopende band, die met een snelheid v naar rechts gaat, strooit men per seconde een hoeveelheid zand μ (kg/s). De verticale snelheid van het op de band vallende zand is verwaarloosbaar klein.

a) Bereken de grootte van de kracht die op de band moet worden uitgeoefend opdat deze met constante snelheid v blijft lopen.

b) Bereken de kinetische energie van het per tijdseenheid (bij R_2) afgeworpen zand.

c) Bereken ook de arbeid die door de onder a) berekende kracht per tijdseenheid wordt verricht.

d) Verklaar waarom de arbeid op de band verricht niet gelijk is aan de toename van de kinetische energie van het zand. Wat is er met de rest gebeurd?
Is het nodig dat er wrijving is tussen zand en band?

18. Ver van de invloed van hemellichamen bevindt zich een raket met massa M (kg). Per seconde wordt er, steeds in de zelfde richting, een constante hoeveelheid gas μ (kg/s) uitgestoten.
De snelheid van het gas t.o.v. de raket is v. Deze snelheid is onafhankelijk van de snelheid van de raket.

a) Hoe groot is de kracht die door het uitgestoten gas op de raket wordt uitgeoefend?

b) Hoe groot is de versnelling van de raket als functie van de tijd? Bedenk dat de massa van de raket ook een functie van de tijd is: $M(t) = M - \mu t$!

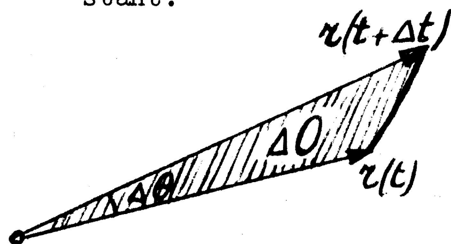
c) Bereken de snelheid van de raket als functie van de tijd.
   Ook als hij zich in een homogeen zwaartekracht-veld bevindt en loodrecht omhoog gaat.

19. <u>Impulsmomenten en Perkenwet van Kepler</u>.

In een centraal krachtveld is de component van de versnelling $\vec{a}$ loodrecht op de radius-vector $\vec{r}$ ($\vec{a}_\theta$) nul, als de beweging in poolcoördinaten beschreven wordt met de oorsprong in het centrum van het veld.

a) Toon aan dat door de radius-vector in gelijke tijden gelijke oppervlakken doorlopen worden. Dit is de perkenwet van Kepler. Deze geldt blijkbaar voor ieder krachtveld, mits dit maar centraal is.

Aanwijzing: ga uit van de uitdrukking voor $\vec{a}_\theta$ (blz. 23, formule 10) en tracht te bewijzen dat uit $a_\theta = 0$ volgt $r^2\dot{\theta}$ = constant.



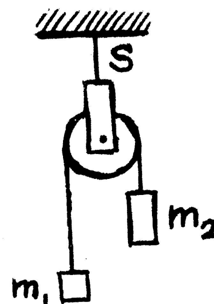
$\Delta O = \frac{1}{2} \sin \Delta\theta . r(t) . r(t + \Delta t)$

Zoek vervolgens naar een uitdrukking voor het oppervlak van het gearceerde stuk. Dit is het door de voerstraal in het tijdsinterval Δt (volgend op t) doorlopen oppervlak ΔO. Bereken $\frac{dO}{dt}$ en trek Uw conclusie.

b) Wat is het verband tussen het impulsmoment J en $\frac{dO}{dt}$ (het oppervlak van het "perk" per tijdseenheid door de voerstraal doorlopen).

20. Een lift heeft een snelheid $\bar{v}$ (t) verticaal naar boven gericht. In de lift wordt met een (goed gedempte) veerbalans, geijkt in krachteenheden (newtons) het gewicht in de lift bepaald van een voorwerp met massa M.
Geef de uitkomst van de weging, als functie van de tijd.

21. Twee lichamen met massa m_1, respectievelijk m_2, zijn verbonden door een niet uitrekbaar, massaloos koord. Dit koord is om een "ideale" katrol geslagen, d.w.z. een katrol zonder massa en zonder wrijving.

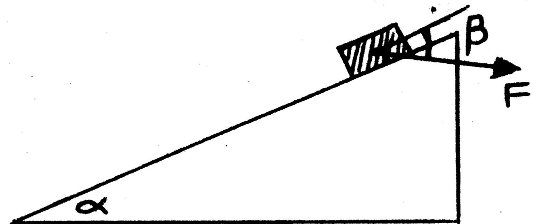


a) Bereken de versnelling van de lichamen en de spanning in het koord.

b) Hoe groot is het gewicht van het stelsel tijdens de beweging?

Dit komt neer op het volgende probleem: Hoe groot is tijdens de beweging de spanning S in het bovenste koord.
Bij beweging treedt dus een gewichtsvermindering op. Zoek een verband tussen m_1, m_2 en de relatieve gewichtsverandering.

22. Een massa m ligt op een ruw hellend vlak F. (wrijvingscoëfficiënt f).



a) Hoe groot mag de hellingshoek α gekozen worden (zie fig), opdat het lichaam op het hellend vlak blijft liggen.

b) Men maakt α zò groot dat het lichaam naar beneden zou glijden. Men brengt een extra kracht F aan zodat het lichaam in rust blijft. Hoe groot is de kleinste waarde van F die het lichaam nog juist in evenwicht houdt? Geef ook de richting van de kracht aan.

23. Indien de machines van een schip hun volle vermogen P ($^{Nm}/_s$) leveren, heeft het schip een snelheid v_o ($^m/_s$). Zijn massa is m (kg). Neem aan dat de wrijvingskracht F evenredig is met de snelheid van het schip:
$F_n = - b.v.$ .....(1) $g = 10 \frac{m}{s^2}$ $V_{max} = 36 \frac{km}{h}$

a) Druk de afstand die het schip nog aflegt, als het met maximale snelheid vaart en de motoren worden stopgezet, uit in de gegevens.

b) Bewijs dat de grootheid b uit (1) gelijk is aan $-\frac{dp}{ds}$, waarin p de impuls van het schip is (m.v(t)). Dit betekent dat de impulsafname evenredig is met de afgelegde weg. Kunt U hiermee de opgave onder a) eleganter oplossen?

c) Bereken de afgelegde weg als het vermogen van de motoren 50.000 PK is (1 PK = 75 $kgf.m.s^{-1}$), de maximumsnelheid 36 $km/_h$ is en de massa van het schip 36.000 ton bedraagt.

24. Bij de een-dimensionale harmonische beweging van een massapunt m is de kracht $\vec{F}$ evenredig met de uitwijking $\vec{r}$. De richting van de kracht is tegengesteld aan die van de uitwijking.

$$\vec{F} = -k\vec{x}$$

Voor het één-dimensionale geval wordt dit:

$$m\ddot{x} = -kx \rightarrow \ddot{x} = -^k/_m\, x \text{ of } \ddot{x} = -\omega^2 x \quad (\omega^2 = {}^k/_m) \quad (1)$$

Veronderstel dat op tijd t = o het massapunt zich in de oorsprong bevindt (x = o) en dat het een snelheid v_o in de pos. x-richting bezit.

a) Los de differentiaalvergelijking op. Probeer als oplossingen sin ωt en cos ωt. De meest algemene oplossing is een liniaire combinatie van deze twee. Denk aan de beginvoorwaarden!

b) Bereken de potentiële energie van het massapunt als functie van de uitwijking x. De kinetische energie $E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$.
Daar de totale energie constant is(en gelijk aan de kinetische energie op t = o) is

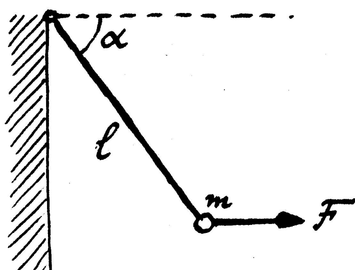
$$E_p + E_k = E_t$$

Los deze vergelijking op door "scheiding van de variabelen" (x en t) volgens de methode die beschreven is op blz. ~~40~~ 52 van het diktaat.

25. a) Laat zien, dat uit de evenwichtsvoorwaarden $\Sigma_i \vec{F}_i = o$ voor één deeltje waarop een aantal krachten werkten, volgt dat:

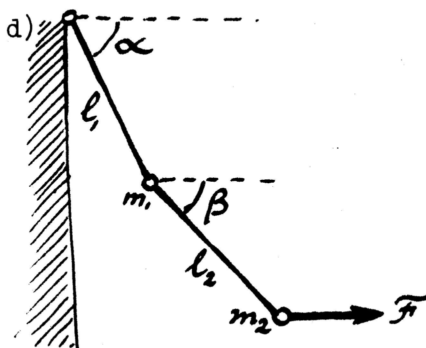
$$\delta \Sigma_i E_{pot\ i} = o$$

b) Pas dit toe op het volgende geval.



Een massaloze staaf met lengte l is scharnierend aan een verticale muur opgehangen. Aan het einde is een puntmassa m bevestigd. Hierop werkt de horizontale kracht F als er evenwicht is. Bereken de hoek α.

c) Hoe groot is de spanning van de staaf?

d) 

In nevenstaande figuur is scharnierend aan de eerste stang l_1 een tweede $-l_2-$ bevestigd. Beide stangen dragen een even grote massa, $m_1 = m_2$; $l_1 = l_2$.

Op m_2 werkt een horizontale kracht F. Er is evenwicht.

Bereken de hoeken α en β (zie fig.), de spanningen in l_1 en l_2 en de totale kracht op het scharnier S.

(Doe dit met het principe van de virtuele verplaatsing).

26. Een deeltje met massa m bevindt zich in een potentiaalveld dat beschreven wordt door $V = ax^2$ $(a > 0)$. Bovendien werkt op dit deeltje een kracht $F = F_m \cos \omega t$ gericht langs de X-as. Op het tijdstip $t = 0$ geldt: $x = 0$; $\dot{x} = 0$. Er is geen wrijving.

a) Bereken de plaats van het deeltje x(t) als funktie van de tijd.

b) Bereken de limietovergang van de onder a) gevonden funktie x(t) voor het geval van resonantie.

27. Een puntmassa m beweegt zonder wrijving in het X-Y vlak. Op m werkt uitsluitend een conservatieve kracht, gegeven door de potentiële energiefunktie $V = \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{2}by^2$ ($a > 0$ en $b > 0$).

a) Schets de equipotentiaallijnen in het X-Y vlak.

b) Bepaal richting en grootte van bovengenoemde kracht als funktie van plaatscoördinaten.

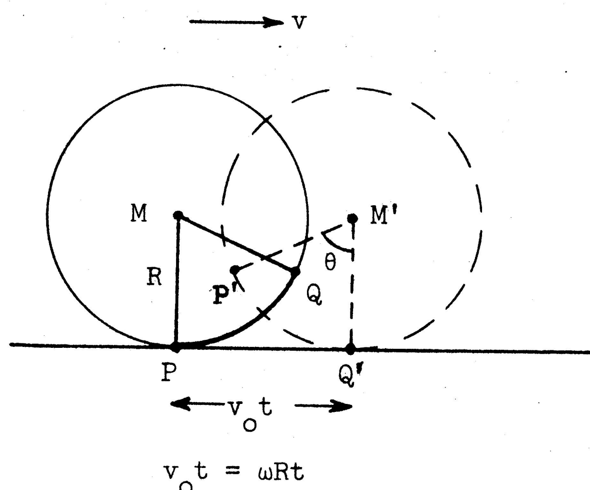
c) Beschrijf de beweging, die m uitvoert als het op het tijdstip $t = 0$ zonder beginsnelheid wordt losgelaten in een punt op de X-as (buiten de oorsprong).

d) Bereken de algemene beweging die wordt uitgevoerd als op $t = 0$ de puntmassa een willekeurige plaats en snelheid heeft.

e) Aan welke betrekking(en) moeten a en b voldoen opdat de algemene beweging periodiek is?

Bij deze serie behoort als eerste vraagstuk: 27 van de vorige serie.

28.



Er wordt een merkteken P gezet op het laagste punt van een wiel met straal R. Dit wiel rolt over een horizontale weg, zonder te slippen met een hoeksnelheid ω. Daardoor draait het punt P in de tijd t om het middelpunt M van het wiel over een hoek $\theta = \omega t = {v_o t}/R$.

a) Bereken de cartesiaanse coordinaten van P als functie van t.

b) Bereken eveneens de componenten van de snelheid en de versnelling van P. Welke richting heeft de versnelling?

c) Er wordt tijdens de beweging van het wiel modder opgeworpen. Toon aan dat de maximale hoogte die de modder kan bereiken $y + \frac{\dot{y}^2}{2g}$ is en dat deze afgeworpen wordt van een punt van de omtrek van het wiel, dat g/ω^2 hoger ligt dan het centrum.

y is één der coordinaten van de rand van het wiel, waarvan de modder wordt opgeworpen.

29. Een lichaam is op een zuiger geplaatst, die een harmonische beweging heeft in verticale richting.
De amplitudo van de beweging is 0,05 m.

a) In welke positie van de zuiger is het het waarschijnlijkst dat het lichaam contact verliest met de zuiger?

b) De grootste frequentie waarbij het blok nog net in gedurig contact met de zuiger is, is $\sqrt{20g}$. Bewijs dat.

30. (Voorbeeld van een tentamenvraag)

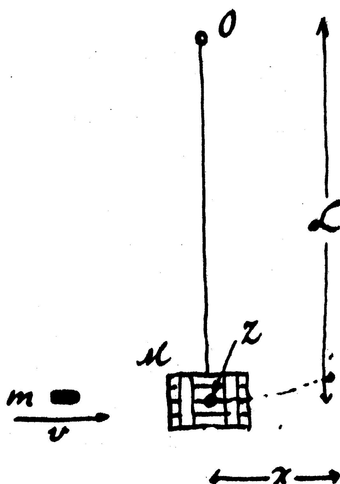
a) Behandel het probleem van een kritisch gedempte harmonische oscillator, waarop géén uitwendige kracht werkt (diktaat blz. 45).

b) Aan welke relatie(s) moeten de beginvoorwaarden (op tijd $t = o$) voldoen opdat de onder a) bedoelde oscillator éénmaal het evenwichtspunt ($x = o$) passeert voor $o < t < \infty$?

c) Op de oscillator werkt een uitwendige periodieke kracht $F(t) = F_o \cos \omega t$. Leid de baanvergelijking van de oscillator in de stationaire toestand af.

d) Bij welke cirkelfrequentie ω is (in het onder c) bedoelde geval) het gemiddelde door de uitwendige kracht $F(t)$ aan de oscillator toegevoegde vermogen maximaal (voor vaste waarde van F_o)?

31.



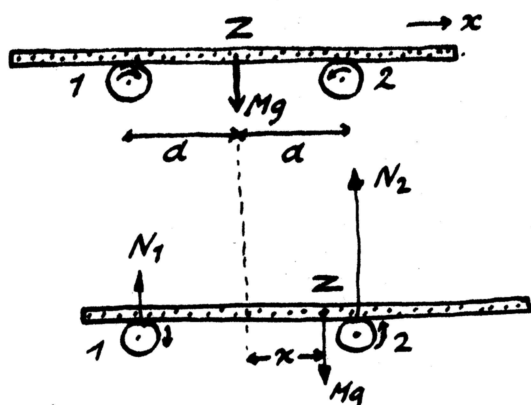
Een kist met zand, massa M, hangt aan een koord. In Z is een index bevestigd. Men schiet een kogel met massa m en snelheid v in de kist met zand. De afstand van ophangpunt O tot het zwaartepunt van de kist is L.

a) Toon aan, dat de uitwijking x van de kist in horizontale richting bij benadering wordt (als $m << M$):

$$x \approx \frac{mv}{M}\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (1)$$

b) Onder welke condities is de afwijking die (1) geeft van de theoretische waarde minder dan 1%?

32.



Een uniforme lange plank met massa M en lengte L wordt op twee, in tegengestelde richting draaiende, evengrote cilinders geplaatst (zie figuur).

De assen van beide cilinders zijn evenwijdig en liggen in een horizontaal vlak op een afstand $2d$ ($2d << L$).

f is de wrijvingscoefficient van plank- en cilindermateriaal.

a) Toon aan, dat de plank bij voldoende grote omwentelingssnelheid Ω van de cilinders een harmonische beweging krijgt, indien men de plank op t = o op de cilinders legt, zodat het zwaartepunt Z een coordinaat x_o heeft.
Geef de baansvergelijking van het zwaartepunt van de plank.

b) Welke hoeksnelheid Ω moeten de cilinders minstens hebben opdat de plank een harmonische beweging krijgt?
De straal van een cilinder is R.

33. Toon aan, dat het impulsmoment $\vec{J}$ van twee deeltjes met massa m_1, resp. m_2 ten opzichte van hun zwaartepunt Z gelijk is aan :

$$\vec{J}^z = \vec{r}_{12} \times \mu\vec{v}_{12}.$$

Hierin is $\vec{r}_{12}$ de radiusvector die de positie van m_1 t.o.v. m_2 aangeeft ($\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$), $\vec{v}_{12}$ is de snelheid van m_1 t.o.v. m_2 ($\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$)en μ is de gereduceerde massa ($\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$).

Aanwijzing: Druk eerst de plaats en de snelheid van Z uit in m_1, m_2, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$. Zoek daarna uitdrukkingen voor plaats en snelheid van beide deeltjes in het zwaartepuntstelsel:

$$\vec{r}_1^{\,z},\ \vec{r}_2^{\,z},\ \vec{v}_1^{\,z} \text{ en } \vec{v}_2^{\,z}.$$

Substitueer het gevondene in de definitievergelijking voor $\vec{J}^z$.

34. a) Bewijs, dat voor een systeem van twee deeltjes, <u>waartussen "inwendige" krachten optreden die gericht zijn volgens hun verbindingslijn</u>, geldt dat de som van de beide uitwendige krachtsmomenten $\vec{\tau}_1$ en $\vec{\tau}_2$ gelijk is <u>aan de tijdsafgeleide van de beide impulsmomenten</u> ($\dot{\vec{J}}_1$ en $\dot{\vec{J}}_2$). Neem aan dat dit voor een willekeurig aantal deeltjes ook geldt.

b) Bewijs dat het totale impulsmoment $\vec{J}$ van een systeem van n deeltjes gelijk is aan de som van het baanimpulsmoment ($\Sigma_i\, m_i\, .\, \vec{r}_z \times \vec{v}_z$) en het spinimpulsmoment $\vec{S}$ (= $\Sigma_i\, m_i \vec{r}_i^{\,z} \times \vec{v}_i^{\,z}$).

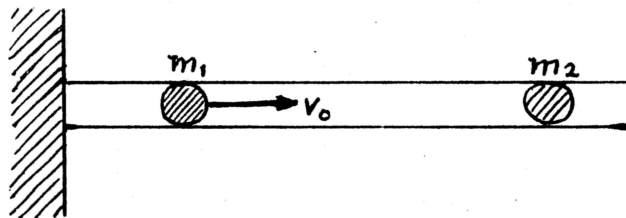
c) Bewijs, dat $\dot{\vec{J}} = \frac{d\vec{s}}{dt} + \vec{r}_z \times \dot{\vec{P}}$, waarin $\vec{P}$ de totale impuls is ($\vec{P} = \Sigma_i m_i \vec{v}_z$).

d) Toon tenslotte aan, dat $\vec{\tau}^{ez} = \dot{\vec{S}}$.

U heeft nu een belangrijke stelling over draaiende bewegingen doorzien.

35. Een neutron botst elastisch tegen een stilstaand proton. Als de deeltjes beiden na de botsing een snelheid hebben, wat is de hoek die deze snelheden met elkaar maken?
Aangenomen mag worden dat proton en neuton dezelfde massa hebben.

36.



Twee knikkers m_1 en m_2 kunnen zonder wrijving bewegen in een oneindig lange, oneindig zware buis, die aan een zijde is afgesloten (zie tekening). De beginsnelheid van m_1 is v_0, die van m_2 nul.

a) Bereken de snelheden van m_1 en m_2 na de (elastische) botsing.

b) Aan welke voorwaarde(n) moeten de massa's m_1 en m_2 voldoen, opdat er nog minstens één botsing zal plaatsvinden?

37. Bij de kernreactie $^7\text{Li} + p \rightarrow {}^7\text{Be} + n + Q$ wordt een hoeveelheid mechanische energie Q in bindingsenergie omgezet. De reaktie wordt uitgevoerd door een versneld proton met massa m te laten botsen met een rustende lithiumkern met massa $M = 7m$. De massa's van de gevormde berylliumkern en het neutron zijn weer resp. M en m. Q = 1,65 MeV.

a) Hoe groot moet de kinetische energie in MeV van het proton minstens zijn om deze reaktie mogelijk te maken?

b) Beschrijf de reaktie in het zwaartepuntsysteem als het proton de in a) uitgerekende "drempelenergie" heeft.

c) Bewijs, dat de kinetische energie van het neutron, indien het onder een hoek van 90° met de oorspronkelijke richting van het proton wordt uitgezonden, gelijk is aan

$$E_n = 0{,}75\ E_p - 1{,}44 \text{ MeV}.$$

38. Een deeltje (massa 6 kg) en snelheid 12 m/s botst centraal met een deeltje (massa 3 kg) dat met een zelfde snelheid in tegengestelde richting beweegt. De beide deeltjes kleven na de botsing aan elkaar. Er werken géén uitwendige krachten op het stelsel.

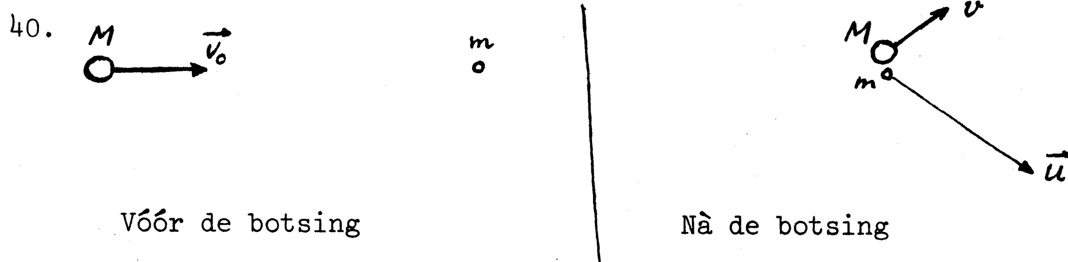
a) Wat is de eindsnelheid van de resulterende massa van 9 kg?

b) Hoeveel mechanische energie gaat bij de botsing verloren?

c) Na de botsing ontploft een lading met verwaarloosbare massa die in een van beide lichamen ingesloten was. Hierna bewegen de beide oorsronkelijke lichamen zich in het zwaartepuntsstelsel loodrecht op de oorspronkelijke bewegingsrichting. De totale kinetische energie in het zwaartepuntsstelsel is nu 144J.
Hoe groot is de snelheid van het lichaam van 6 kg in het laboratorium stelsel?

39. Een deeltje met massa m botst volkomen elastisch met een stilstaand deeltje M ($m < M$). Het invallende deeltje maakt na de botsing een rechte hoek met oorspronkelijke richting van de snelheid. Onder welke hoek ϕ wordt het zware deeltje verstrooid?

40.



Een elementair deeltje met massa M en snelheid $\vec{v}_0$ botst tegen een ander elementair deeltje met massa m, dat in rust is. $M>m$. Het beschouwde referentiestelsel is een inertiaalstelsel.
Beide deeltjes mogen als puntmassa's opgevat worden. De botsing is volkomen elastisch.
Na de botsing heeft het eerste deeltje een snelheid $\vec{v}$ en het tweede een snelheid $\vec{u}$ (zie figuur).
Alleen gedurende de botsing, d.w.z. op kleine afstand oefenen de deeltjes een kracht op elkaar uit, die gericht is langs hun verbindingslijn en waarvan de grootte alleen van de afstand afhangt.

a) Formuleer de behoudswetten, in vektornotatie, voor de toestanden vóór, resp. nà de botsing (met toelichting) in het "laboratoriumstelsel"
Noem $^{m}/M = \alpha$

b) Men is geïnteresseerd in de grootste afbuigingshoek die het deeltje met massa M na de botsing kan krijgen (wederom beschouwd in het laboratoriumstelsel).
Leid een uitdrukking voor deze hoek af.

41. Twee puntmassa's A en B met massa m_1, resp. m_2 zijn door een massaloze veer, met veerconstante α en lengte l verbonden. De veer ligt in ontspannen toestand op een tafel, waarop de massa's wrijvingloos kunnen bewegen langs hun verbindingslijn.
Op t = o geeft men A een snelheid V_o in de richting van B.

a) Bereken de snelheid van het zwaartepunt van A en B t.o.v. de tafel.

b) Hoe groot is de kinetische energie behorende bij de zwaartepuntsbeweging (de translatie-energie)?

c) Toon aan dat de beide lichamen in het zwaartepuntsstelsel een harmonische beweging hebben en bereken de eigenfrequentie hiervan.
Gebruik het relatieve stelsel.

d) Bereken de lengte van de veer als funktie van de tijd.

e) Bereken de vibratie-energie, d.w.z. de som van kinetische en potentiële energie, in het zwaartepuntsstelsel.

f) Laat zien dat de totale energie gelijk is aan de kinetische energie van A op t = o.

42. Twee identieke ongedempte mathematische slingers met lengte l en massa m zijn verbonden door een veer met veerconstante k. Als de slingers in rust zijn en verticaal hangen is de veer ontspannen. De veer is bevestigd tussen de beide slinger-lichamen met massa m. We beschouwen het geval dat de slingers kleine uitwijkingen vertonen ($x \ll l$).

a) Stel de D.V. van de beweging van m_1, resp. m_2 op (zie diktaat blz. 60, waar k echter f genoemd wordt).

b) Maak hiervan twee nieuwe D.V., waarin de variabelen $(x_1 + x_2)$ en $(x_1 - x_2)$ zijn.

c) Los deze op voor het algemene geval.
Aanwijzing: $(x_1 + x_2)$ is van de gedaante:
$A\cos \omega_1 t + B\sin \omega_1 t$. Druk ω_1 uit in de gegevens.
Hetzelfde geldt voor $(x_1 - x_2)$.

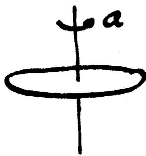
d) Geef de oplossingen van x_1 en x_2 als op $t = 0$:
$x_1 = a$; $\dot{x}_1 = 0$; $x_2 = 0$ en $\dot{x}_2 = 0$.

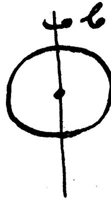
42. Bereken de traagheidsmomenten van een cirkelvormige, dunne homogene schijf met massa m en straal r (zie figuren)

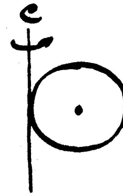
a) om een as door het middelpunt loodrecht op het vlak van de schijf;

b) om een as die samenvalt met een middellijn;

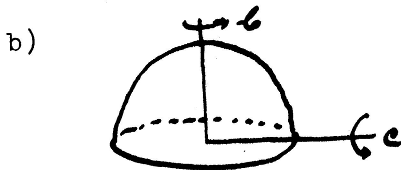
c) om een as, in het vlak van de cirkelvormige schijf gelegen, die raakt aan de cirkelomtrek.







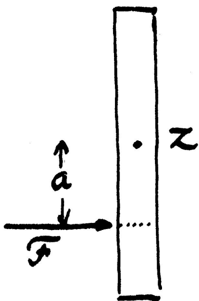
43. a) Bereken het traagheidsmoment van een homogene bol om een as door het middelpunt. Massa m, straal r.

b) 

Bereken de traagheidsmomenten van een halve, homogene bol om de assen b en c (zie figuur).

c) Bepaal de plaats van het zwaartepunt van de halve bol uit b).

44. Een lat met lengte L en massa m ligt op een horizontaal wrijvingsloos plat vlak. Gedurende een zeer klein tijdsinterval Δt werkt loodrecht op de lat een kracht, ter grootte F, die de lat een impuls geeft. De kracht werkt op een afstand a van het zwaartepunt.



a) Bereken de snelheid van het zwaartepunt Z.

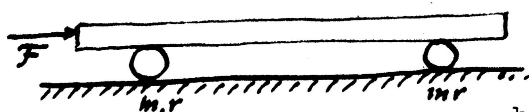
b) Bereken de hoeksnelheid ω waarmee de lat om Z roteert.

c) Toon aan dat er op de lat een punt Q aan te wijzen is, dat in het begin in rust verkeert. Anders gezegd: dat de totale beweging die ontstaat (even) op te vatten is als een momentane draaiing om Q. Als b de afstand QZ voorstelt toon dan aan, dat $b = \frac{I}{ma}$, waarin I het traagheidsmoment van de lat voorstelt (om Z).

Q is het centrum van *percussie*. Zou men dit punt vasthouden, b.v. door er een verticale as in te bevestigen, dan zou deze as geen impuls "voelen" tijdens de impulsoverdracht.
Van belang bij sporten als baseball, tennis, enz. Men moet de bal proberen te treffen in het percussiecentrum wil men geen onaangename impuls voelen in de hand die het slaginstrument vasthoudt.

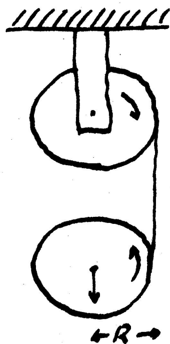
45. Een plank met massa M ligt op 2 identieke homogene cylinders, elk met massa m en straal r, die over een horizontale tafel kunnen rollen. De assen van de cylinders zijn evenwijdig. Op de plank wordt een horizontale kracht F uitgeoefend, gericht loodrecht op de cylinderassen (zie figuur).
De beweging van de plank over de cylinders en van de cylinders over de tafel gebeurt zonder slippen.

a) Bewijs dat de versnelling die de plank krijgt onder invloed van F gelijk is aan $\frac{4F}{4M + 3m}$.



b) Bereken de component evenwijdig aan het tafelvlak, van de kracht die de tafel op één cylinder uitoefent.

46. Twee katrollen hebben gelijke straal R en gelijke massa m. De bovenste kan vrij roteren om een horizontale as door zijn middelpunt.
Er is om beide katrollen vele malen een touw gewonden en de onderste schijf wordt in de getekende stand (touw verticaal!) losgelaten.

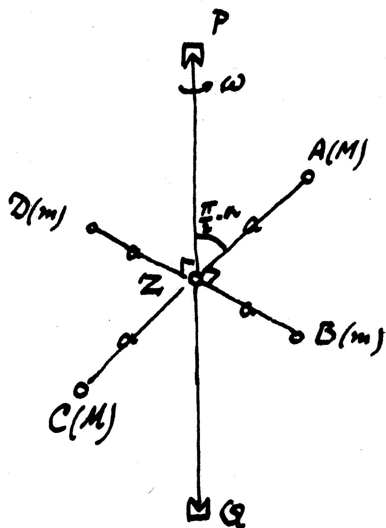


a) Bereken de lineaire versnelling van het zwaartepunt van de onderste schijf.

b) Bereken de spanning in het touw.

c) De hoeksnelheden van beide katrollen om hun zwaartepunt.

47.



Een systeem $ABCD$ bestaat uit twee massapunten A en C met massa M en twee massapunten B en D met massa m. Ze zijn met massaloze staven AC ($=2a$) en BD ($= 2a$) verbonden.
De staven delen elkaar in Z loodrecht middendoor.

a) Geef de richting aan van de hoofdtraagheidsassen van het systeem $ABCD$ en bereken de hoofdtraagheidsmomenten.

b) Het systeem $ABCD$ draait om een massaloze as PQ, die door het punt Z gaat, met een constante hoeksnelheid ω.
$PZ = ZQ = b$. De as PQ is in zijn uiteinden door lagers gefixeerd t.o.v. een inertiaal stelsel, zodat PQ ruimtevast is. $g = 0$.
AC maakt met PQ een hoek $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ en BD staat loodrecht op PQ.
Bereken de richting en de grootte van de impulsmomentvektor $\vec{J}$ als funktie van de tijd, beschouwd in het inertiaalstelsel.
Aanwijzing: Geef eerst $\vec{J}$ in het lichaamvaste stelsel.

c) Bereken richting en grootte van de kracht die in ieder der lagers op de uiteinden P en Q van de as worden uitgeoefend als funktie van de tijd (wederom in het inertiaalstelsel) als het systeem $ABCD$ om de as PQ met constante hoeksnelheid ω roteert.

48. Van twee wielen A en B (met verwaarloosbare dikte), beide met straal R en massa M , zijn de draaipunten verbonden door middel van een massaloze staaf (zie figuur).

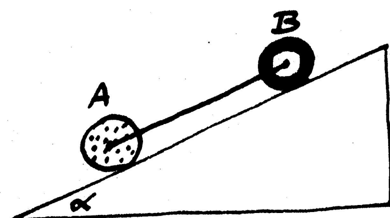
De massa van wiel A is homogeen verdeeld over zijn oppervlak en die van wiel B is homogeen verdeeld langs zijn omtrek.

Beide wielen kunnen rollen (zonder slippen) over een hellend stroef vlak (hellingshoek α; zie figuur).

De wielen blijven tijdens het rollen in een verticaal vlak, dat loodrecht staat op het bovenbedoelde hellende vlak.

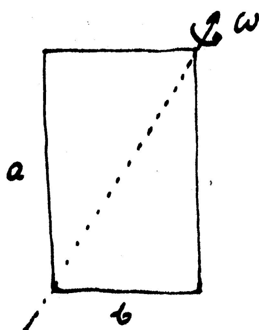
De versnelling van de zwaartekracht is g.

De wrijving in de draaipunten mag worden verwaarloosd.



Bereken de versnelling van het systeem alsmede de reactiekrachten in de staaf.

49.



Een homogene rechthoekige plaat heeft met een massa m en zijden a en b. De plaat is overal even dik. De dikte is te verwaarlozen t.o.v. a en b.

a) Welke zijn de hoofdtraagheidsassen en hoe groot zijn de traagheidsmomenten ten opzichte van het zwaartepunt van de plaat?

b) Men roteert de plaat om een vaste as, die samenvalt met een diagonaal van de plaat met hoeksnelheid ω. Bepaal het impulsmoment $\vec{J}$ ten opzichte van een lichaamsvast assenstelsel.

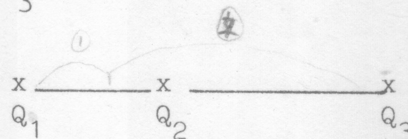
c) Leid de grootte en de richting van het krachtmoment af, dat nodig is om de plaat met een constante hoeksnelheid ω om de bovengenoemde draaias te doen roteren.

WERKKOLLEGE OPGAVEN: WETTEN VAN NEWTON EN COULOMB (dr. H. Nauta).

1. In twee punten P en Q met een onderlinge afstand van 1 km zijn twee deeltjes geplaatst elk met een lading van 1 Coulomb. Hoe groot is de kracht die de deeltjes op elkaar uitoefenen? Beide deeltjes hebben dezelfde massa. Hoe groot zou deze moeten zijn opdat de gravitatie-aantrekkingskracht de Coulombkracht kompenseert?

2. De verbindingslijn van 3 puntladingen Q_1, Q_2 en Q_3 is een rechte.

   Gegeven: Q_1 en Q_3 zijn positieve ladingen,
   Q_2 is een negatieve lading.
   $Q_3 = 4Q_1$.

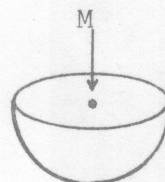


   a) Is er een plaats op de verbindingslijn $Q_1 - Q_3$ aan te geven waar de netto kracht op Q_2 nul is en zo ja, wat is dan de afstand $Q_1 - Q_2$?

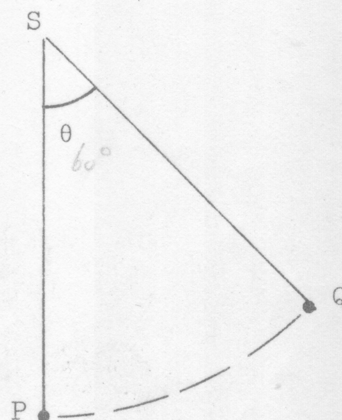
   b) Is de grootte van Q_2 van invloed op dit resultaat? neen

   c) Is het eventueel bereikte evenwicht een stabiel of labiel evenwicht? ~~stabiel~~

3. Een dunne glazen kom, welke de vorm heeft van een halve bol, is homogeen geladen. De totale lading bedraagt Q.
   Bereken de elektrische veldsterkte in het middelpunt M van de bol.



4. Twee homogeen geladen bolletjes P en Q waarvan de afmetingen verwaarloosbaar zijn, hebben beide een lading $+1/3.10^{-7}$ C en een massa 2 mg.
   Ze bevinden zich elk op een afstand van 1 m van S, de hoek PSQ (θ) is 60°.



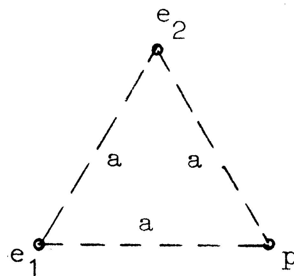
   a) Bereken de potentiaal en de veldsterkte in S.

b) Veranderen deze waarden indien de diameter van de bolletjes 25 cm zou zijn?

c) P is gefixeerd 1 m onder S, Q is met een gewichtloze draad van 1 m verbonden aan S. Wat gebeurt er met Q indien dit bolletje verder niet vastgehouden wordt?

d) Tenslotte wordt een evenwichtsstand bereikt. Laat zien dat $\cos\theta = 3/4$.

5. Gegeven één proton (p) en twee elektronen e_1 en e_2) op onderling gelijke afstanden a (zie tekening). Neem $a = 10^{-10}$ m, de elementaire lading = $= 1{,}6 \times 10^{-19}$ C.



$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^{+9}$ m/F.

a) Wat is de potentiële (interaktie) energie van e_1 ten opzichte van p als e_2 niet aanwezig is?

b) Wat is de potentiële energie van e_2 ten opzichte van e_1 en p?

c) Wat is de totale <u>interaktie</u> energie van dit systeem; ofwel hoeveel energie is nodig om deze konfiguratie tot stand te brengen?

6. Op de x-as liggen in de punten $\frac{d}{2}$ en $-\frac{d}{2}$ de puntladingen q en -q. Bereken het elektrisch veld naar richting en grootte in de punten P op een afstand r van de oorsprong als

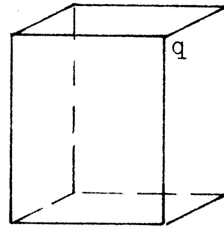
1) P op de x-as ligt.

2) P in het vlak x = 0 ligt.

Ga na hoe de veldsterkte in de punten P wordt als $r \gg d$ is.
Druk het veld in dit laatste geval uit in het dipoolmoment $\vec{p} = q\vec{d}$, waarbij $\vec{d} = d\vec{e}_x$.
Teken de veldlijnen die door de punten P gaan.

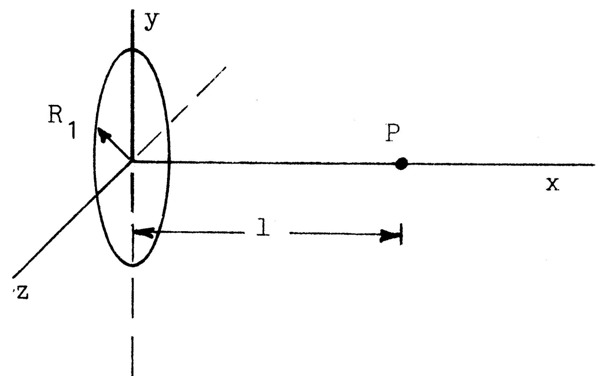
7. Bereken het elektrostatische veld van een homogeen geladen oneindig lange cilinder (ladingsdichtheid ρ, straal R). Ga na dat de wet van Gauss $\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ overal geldt.
Bereken het potentiaalveld in de gehele ruimte en kies hierbij $V(R) = 0$. Schets de waarde van $\vec{E}$ en V als funktie van de afstand r tot de cilinderas.

8. Een lading q is geplaatst op een van de hoekpunten van een kubus. Bereken de elektrostatische flux door elk der zijvlakken.



9. Probeer het volgende te beantwoorden door alleen gebruik te maken van symmetrie en het superpositieprincipe.
Een halve bolschil is bezet met een uniforme oppervlaktelading (zie ook vraagstuk 3). We beschouwen het vlak door de rand van de halve bolschil.
Bewijs dat in punten van dit vlak binnen de randcirkel $\vec{E}$ loodrecht op dat vlak staat. Wat kunt u zeggen over de symmetrie van het veld, over $\vec{E}$ op de as van de schil en over de radiële komponent van $\vec{E}$ in het vlak van de randcirkel buiten de bolschil?

X 10. Gegeven een ringvormige draad met een straal R_1 waarop homogeen verdeeld een totale lading q zit.



a) Hoe groot is het veld in het punt x = 0? Licht uw antwoord toe.

b) Bereken de veldsterkte in het punt P op de x-as op een afstand l van het centrum van de ring.

c) Bereken de potentiaal in punt P.

d) Bereken ook uit de potentiaal de komponenten van de veldsterkte in x-, y- en z-richting in punt P.

X 11. Een ronde platte schijf met straal R van isolerend materiaal is homogeen geladen, de oppervlakteladingsdichtheid is σ.

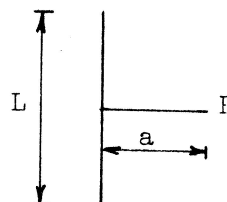
a) Bereken de potentiaal in een punt P op de as van de schijf, noem de afstand van P tot het middelpunt van de schijf x.

b) Bereken uit de potentiaal de elektrische veldsterkte in P. Hoe is de veldsterkte vektor gericht?

c) Waartoe nadert de veldsterkte in P voor R >> a? Op welke eenvoudige manier kunt u dit resultaat rechtstreeks verkrijgen?

X 12. Een dunne niet-geleidende staaf met lengte L draagt een totale lading q uniform verdeeld over de staaf.

a) Bereken de door deze lading veroorzaakte potentiaal in een punt P op de middelloodlijn op de staaf op een afstand a van de as van de staaf gelegen.



b) Bereken met behulp van de potentiaal de veldsterkte E in P.

c) Toon aan dat de verkregen uitdrukking voor $L \to \infty$ gelijk is aan de veldsterkte in P berekend met behulp van de wet van Gauss.

Aanwijzing: $\int \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx = \ln \left| x + \sqrt{1 + x^2} \right|$

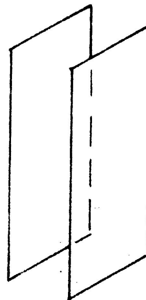
13. Twee oneindig uitgestrekte geladen platen van niet-geleidend materiaal zijn evenwijdig opgesteld op een onderlinge afstand van 2 m. De ladingsdichtheden zijn respektievelijk 8 $\mu C/m^2$ en - 4 $\mu C/m^2$ (figuur a).

Gevraagd:

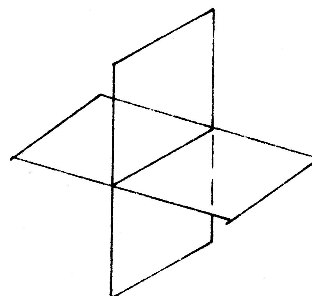
a) Bereken het elektrisch veld in de gehele ruimte.

b) Bereken de kracht op een puntlading in plaat 1 ten gevolge van de ladingen van plaat 2.

c) Bereken de onderlinge aantrekkingskracht per m^2.



figuur a.

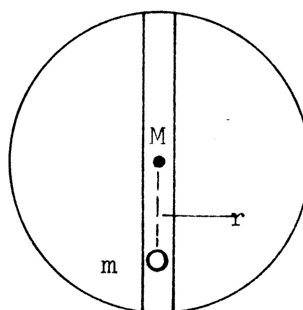


figuur b.

d) Stel dat de 2 vlakken loodrecht op elkaar staan (figuur b), geef dan een schets van het E veld in de 4 kwadranten.

14. Stel dat er een tunnel dwars door het centrum van de aarde is gegraven.

a) Laat zien dat een deeltje met massa m dat losgelaten wordt in de tunnel een harmonische beweging uitvoert. Stel hiervoor eerst de differentiaalvergelijking op (zie vraag 1). Verwaarloos alle wrijvingskrachten en neem aan dat de aarde een uniforme dichtheid ρ heeft.



b) Bereken de periode van deze harmonische oscillator. Hoe lang duurt het dus voordat bijvoorbeeld een zak post aan de andere kant is gekomen? Wat valt u op?

c) Stel de dichtheid $\rho = f(r)$. Welk effekt heeft dit op ons probleem?

Gegeven: $\rho = 5{,}5 \times 10^3$ kg/m^3 en $G = 6{,}7 \times 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

X 15. Een realistisch model van het H-atoom in de grondtoestand is: een puntlading q omgeven door een negatieve ladingsverdeling $\rho(r) = -C\,e^{-2r/a}$. Hierin is a de straal van de eerste Bohr-baan. Hoeveel <u>negatieve</u> lading wordt omvat door een bol met straal r om de kern? Bepaal C zo, dat de totale negatieve lading in de gehele ruimte -q is. Welke fraktie van de negatieve lading wordt omvat door een bol met straal a? Bereken $\vec{E}$ op afstand a van de kern en vergelijk E met de doorslagveldsterkte in lucht (een vlakke kondensator met plaatafstand van 1 mm in droge lucht slaat door bij een spanning op de kondensator van meer dan 3 kV). Gebruik bij de berekening van E: $q = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C; $a = 0{,}5$ Å.

16. De maximale veldsterkte die in een vakuum aan het oppervlak van een geleider bestaan kan voordat veld emissie (koude emissie) van elektronen optreedt, is ongeveer 10^8 volt/m. Indien de oppervlaktelading die zo'n veld produceert negatief is, bereken dan het aantal elektronen per oppervlakteeenheid en vergelijk deze met het aantal atomen per eenheid van oppervlakte. Vergelijk de kracht op een elektron in dit veld met die op een elektron dat zich bevindt op een atomaire afstand van een proton.

17. Om de aarde bestaat een elektrisch veld, dat naar het middelpunt van de aarde gericht is. Bij het oppervlak der aarde bedraagt de elektrische veldsterkte 100 V/m, op 1500 m hoogte 25 V/m. Bereken de gemiddelde waarde van:

a) De oppervlakteladingsdichtheid op het oppervlak der aarde in C/m^2.

b) De ruimtelijke ladingsdichtheid in de atmosfeer tussen 0 m en 1500 m hoogte in C/m^3.

Neem zonodig voor de straal van de aarde 6400 km.

18. Als we van een gegeven ladingskonfiguratie òf de potentiaal V(r) òf het veld E(r) kennen, kunnen we de assemblage-energie berekenen. Doe dit op beide manieren voor een homogeen geladen bol met ladingsdichtheid ρ en straal R.

19. Een deeltje met massa m wordt door een gefixeerd punt met een kracht van $m\frac{a}{r^5}$ aangetrokken. In het begin bevindt zich het deeltje op een afstand c van het gefixeerde punt en heeft de snelheid $\sqrt{a/2c^4}$, die tangentieel (loodrecht op c) gericht is.
Laat zien dat de baanvergelijking $r = c\cos\theta$ is.

20. Twee deeltjes met massa's m en M trekken elkaar aan volgens de gravitatiewet. Aanvankelijk zijn zij in rust op oneindig grote afstand van elkaar. Laat zien dat hun relatieve ontmoetingssnelheid gelijk is aan

$$\sqrt{\frac{2G(M+m)}{a}}$$

a is de onderlinge afstand
G is de gravitatiekonstante

Bedenk dat $m_1\vec{v}_1 + M_2\vec{v}_2 = 0$.

21. We beschouwen een bolvormige sterrenhoop (straal R, totale massa M), waarbinnen de sterren uniform verdeeld zijn. Een ster met massa m bevindt zich op een afstand r ($r < R$) van het middelpunt van de sterrenhoop. Welke kracht ondervindt deze ster tengevolge van de wisselwerking met de andere sterren?
Beredeneer dat de ster in een plat vlak beweegt. Stel de bewegingsvergelijking voor de ster in poolkoordinaten op.
Los deze vergelijking op voor de gevallen

a) het impulsmoment $\vec{L} = 0$, de beginsnelheid $\vec{v}(0) = 0$.

b) de radiële komponent van de snelheid $\dot{r} = 0$.

Wat is de meest realistische oplossing? Denk daarbij aan de beweging van de andere sterren uit de hoop.

22. Op een afstand van 800 km boven de aarde wordt een satelliet in een baan om de aarde gebracht. Zijn beginsnelheid $\vec{v}$ staat loodrecht op de voerstraal naar het middelpunt M van de aarde. De straal van de aarde is 6400 km en de versnelling g tengevolge van de zwaartekracht aan het oppervlak van de aarde is 10 m/s^2.

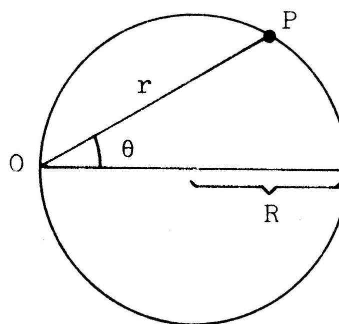
a) Bepaal $\vec{v}$ zodanig dat de satelliet een cirkelbaan gaat beschrijven. Hoe groot is dan zijn omloopstijd?
Druk de energie E_o van de satelliet uit in g, zijn massa m en de straal R van zijn baan. Doe hetzelfde voor het impulsmoment L_o.

b) De onder a berekende snelheid noemen we $\vec{v}_o$. We beschouwen nu de gevallen dat de satelliet met een snelheid $\vec{v} = \alpha\vec{v}_o$ in zijn baan wordt gebracht. Bepaal voor welke waarden van α de satelliet een gesloten baan en voor welke waarden deze een open baan doorloopt. Teken een baan voor $\alpha < 1$ en $\alpha > 1$.

c) Druk voor de gesloten banen de excentriciteit in α uit.
Druk ook de energie, het impulsmoment en de halve lange as uit in α, E_o, L_o en R.
Voor welke waarde van α zal de satelliet met de aarde botsen (of raken)? Veronderstel dat de satelliet bij de botsing zijn snelheid verliest, hoeveel energie wordt dan omgezet in warmte, deformatie-energie, enz.?

23. Van een dubbelster (twee sterren aan elkaar gebonden door de gravitatiekracht) is bekend dat hun omloopstijd om het gemeenschappelijk zwaartepunt $1{,}2 \times 10^6$ s bedraagt. Verder blijken hun massa's gelijk te zijn en is de baan een cirkel. Beide sterren hebben een snelheid van ca. 220 km/s t.o.v. het zwaartepunt. Bereken de massa van de sterren en hun onderlinge afstand.

24. Een deeltje P doorloopt een cirkelvormige baan met straal R tengevolge van de aantrekkingskracht die erop wordt uitgeoefend door een vast punt O op de cirkelomtrek. Bewijs:



a) dat voor de beweging van het deeltje P de perkenwet $r^2\dot{\theta} = C$ (konstant) geldt;

b) dat de aantrekkingskracht omgekeerd evenredig is met de vijfde macht van de afstand OP = r.

25. Een α-deeltje ($^4He^2$-kern) met een energie van 30,0 MeV wordt geschoten op een $^{102}Rb^{45}$-kern, waarvan we aannemen dat de straal $6{,}00 \times 10^{-15}$ m is. Neem aan dat de kernlading in de kern homogeen verdeeld is en verwaarloos kernkrachten. Als het α-deeltje centraal botst, hoever dringt het dan in de kern door:

a) bij verwaarlozing van de elektronenwolk;

b) aannemend dat de hele elektronenwolk zich in alle richtingen uniform verdeeld op een afstand van 1×10^{-11} m van het kernmiddelpunt;

c) als b, doch voor een Rb^{3+} ion.

Indien de botsing niet centraal is, doch zodanig dat het α-deeltje het kernmiddelpunt tot op $1{,}00 \times 10^{-14}$ m nadert, wat is dan onder de aannamen a en b de energie van het deeltje op die kortste afstand?

26. Met welke snelheid moet men een lichaam omhoog schieten om het te doen ontsnappen aan het zwaartekrachtveld van de aarde?
Wat is de ontsnappingssnelheid op de maan, als de maan vanaf de aarde onder een gezichtshoek van $0{,}5^{o}$ te zien is, $3{,}84 \times 10^{8}$ meter van de aarde staat en een massa heeft van $\frac{1}{81}$ de aardmassa?

27. Mars heeft een gemiddelde straal van 3400 km, de aarde 6400 km.
De massa van Mars is 0,11 maal de massa van de aarde; $g_{aarde} = 10 m/s^2$.

a) Bereken de verhouding van de gemiddelde dichtheden van Mars en de aarde.

b) Wat is de waarde van g op Mars?

c) Wat is de ontsnappingssnelheid op de aarde en op Mars?

28. Een deeltje met lading -q en massa m beweegt in een cirkelvormige baan van een gefixeerde lading +Q.

a) Bewijs dat aan de wet dat de derde macht van de straal evenredig is met het kwadraat van de omlooptijd

$$r^3 = \frac{Qq}{16\pi^3 \varepsilon_o m} T^2 \text{ voldaan is.}$$

Merk op dat de evenredigheidskonstante van de verhouding q/m van het deeltje in de baan afhangt.

b) Hoe luidt het verband tussen r en T als de aantrekkingskracht tussen beide deeltjes geen Coulombkracht maar de gravitatiekracht is?

29. Op grote afstand van een bolvormige atoomkern met homogene ladingsverdeling (totale lading Q) en straal R worden door een radiumpreparaat α-deeltjes (lading $q > 0$) geëmitteerd. De massa M van de kern is zeer groot vergeleken met de massa m van een α-deeltje.

a) Geef de uitdrukkingen voor het elektrisch veld E en de potentiaal V van de kern als funktie van de afstand tot het middelpunt van de kern. Maak een grafiek van de absolute waarden van deze funkties.

b) Maak een schets van een baan die een α-deeltje onder invloed van de wisselwerking met de kern zal doorlopen.

c) Welke waarden kan het impulsmoment L van de α-deeltjes (t.o.v. het middelpunt van de kern) aannemen?
Waarom is L een behouden grootheid in dit geval?

d) Bereken de kortste afstand d_o die een α-deeltje heeft tot het middelpunt van een goudkern, indien het precies in de richting van het middelpunt geëmitteerd is met een beginsnelheid $v_o = 1,6 \times 10^7$ m/s. Voor goud geldt $Q = 79 \times 1,6 \times 10^{-19}$ C en $R = 9 \times 10^{-15}$ m, terwijl de lading van het α-deeltje $q = 3,2 \times 10^{-19}$C en de massa $m = 6,6 \times 10^{-27}$ kg is.

e) Toon aan dat α-deeltjes met dezelfde beginsnelheid v_o geëmitteerd maar niet precies in de richting van het middelpunt van de kern, minder dicht tot het middelpunt van de kern naderen dan de lengte d_o, berekend in onderdeel d.
Druk de kortste afstand d van het α-deeltje tot het middelpunt van de kern uit in de kinetische energie E_k, het impulsmoment L, de massa m en de lading q van het α-deeltje en de lading Q van de kern.

f) Hoe groot is de lengte van de halve as a van de banen van de α-deeltjes uit onderdeel e?

Werkcollegesommen $1/r^2$, uit de week van 15-1-'73

1) $\vec{F}_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{r^2} \cdot \hat{r} = 9 \cdot 10^9 \cdot 1^2 \cdot 10^{-6} = 9 \cdot 10^3$ N

$$\vec{F}_G = -\frac{G m^2}{r^2}\hat{r} = -6{,}670 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{-6} \cdot m^2 \text{ N}$$

$$\vec{F}_C + \vec{F}_G = 0 \rightarrow m^2 = 1{,}35 \cdot 10^{20}\ \text{kg}^2 \rightarrow \underline{m = 1{,}16 \cdot 10^{10}\ \text{kg}}$$

2) $\overset{+}{\times}$ Q_1 $\longleftarrow\overset{-}{\times}\longrightarrow$ Q_2 $\overset{+}{\times}$ $Q_3 = 4Q_1$ (Kies de oorsprong in Q_2, en pos. x-as in richting $Q_2 - Q_3$)

$$\vec{F}(Q_1 \rightarrow Q_2) = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{x_{12}^2} \cdot \vec{e}_x$$

$$\vec{F}(Q_3 \rightarrow Q_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{4 Q_1 Q_2}{x_{23}^2} \cdot \vec{e}_x$$

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} = 0 \rightarrow x_{23}^2 = 4 x_{12}^2 \rightarrow \underline{x_{23} = 2 x_{12}}$$

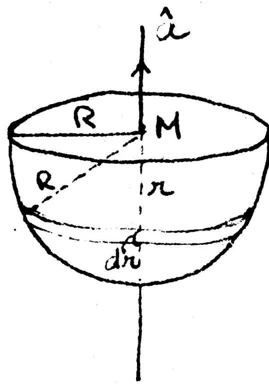
b) Grootte Q onbelangrijk

c) Verplaats Q_2 een afstand δ naar Q_1, dan:

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} = \left\{ \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{(x_{12}-\delta)^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{4 Q_1 Q_2}{(2x_{12}+\delta)^2} \right\} \vec{e}_x < 0$$

Dus Q_2 wordt naar Q_1 getrokken. Het evenwicht is labiel.

3



De ladingsverdeling is rotatie symmetrisch om de as a door het middelpunt. Dus $\vec{E}$ valt langs die as.

Opperv. bolschil : $2\pi R h$
Opperv. ladingsdichtheid $\sigma = Q/2\pi R^2$

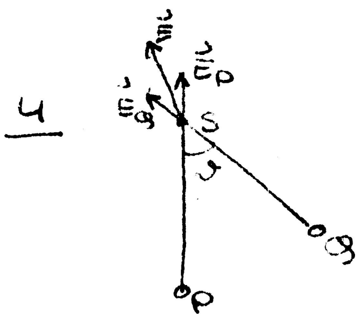
Dus lading schil: Qh/R

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \underset{\text{lading}}{\frac{Q\,dr}{R}} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \frac{r}{R} \cdot \hat{a}$$

↑ $\cos\vartheta$, omdat alleen de bijdrage van $\vec{E}$ langs $\hat{a}$ meetelt. (bij $\frac{r}{R}$)

$$\vec{E} = \int_0^R \frac{Q\,r\,dr}{4\pi\varepsilon_0 R^4}\hat{a} = \frac{\tfrac{1}{2} Q r^2}{4\pi\varepsilon_0 R^4}\hat{a}\Big|_0^R = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{a}$$

4



$$V(S) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}$$
$$= 2 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot 10^{-7} \cdot 9 \cdot 10^{9} = \underline{600\,V}$$

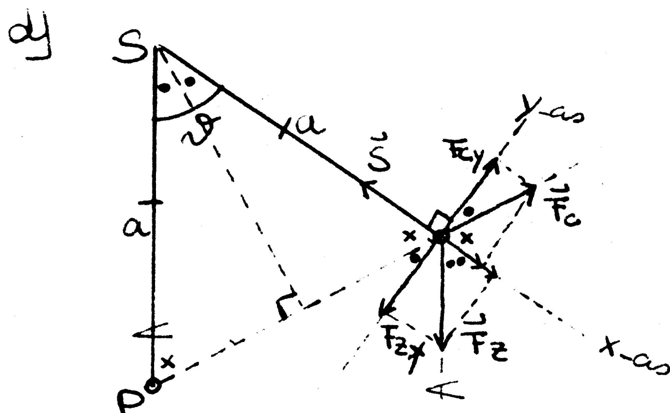
$$\vec{E} = \vec{E}_p + \vec{E}_Q \quad , \quad |\vec{E}_p| = |\vec{E}_Q| = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 300\ V/m$$

$$|E| = E_p \cos\pi/6 + E_Q \cos\pi/6 = \underline{300\sqrt{3}\ V/m}$$

b) Nee, want het veld buiten een homogeen geladen bol is hetzelfde als dat van een even grote puntlading in het middelpunt.

4c Q wordt afgestoten door P. maar naar beneden getrokken door de zwaartekracht.

d)



Er is evenwicht.

In x-richting : $-\vec{S} + F_{c,x} + F_{z,x} = 0$.

In y-richting $F_{z,y} = F_{c,y} \rightarrow mg \sin\vartheta = F_c \cos\frac{1}{2}\vartheta$

$$F_c = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q^2}{a^2 \sin^2 \frac{1}{2}\vartheta}$$

$$mg \sin\vartheta = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \frac{\cos\frac{1}{2}\vartheta}{\sin\frac{1}{2}\vartheta} \quad ; \quad \sin\vartheta = 2\sin\tfrac{1}{2}\vartheta . \cos\tfrac{1}{2}\vartheta$$

$$\sin^3 \tfrac{1}{2}\vartheta = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 m g a^2} = \tfrac{1}{4} \quad \rightarrow \cos\vartheta = 1 - \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{4}$$

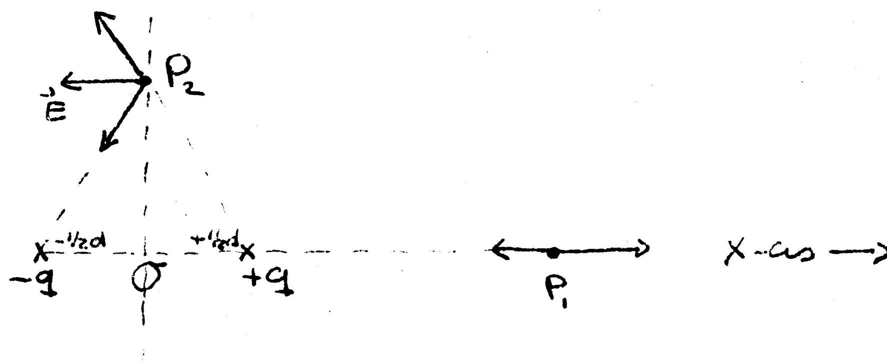
Antwoord uit de opgave onjuist!

5 a) $W(e_1, p) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e_1 . p}{a} = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$

b) $W(e_2 . p) = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$; $W(e_2, e_1) = \frac{+e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$

c) $W_{tot} = W(e_1, p) + W(e_2 \, p + e_1) = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 a} = -14{,}4 \text{ eV}$

6



1) $$\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r-\frac{1}{2}d)^2}\vec{e}_x - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r+\frac{1}{2}d)^2}\vec{e}_x \qquad (1)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{r^2+rd+\frac{1}{4}d^2-r^2+rd-\frac{1}{4}d^2}{(r^2-\frac{1}{4}d^2)^2}\right\}\vec{e}_x$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2rd}{r^4}\vec{e}_x \text{ voor } r \gg d$$

$$= \frac{q\vec{d}}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Met Taylorreeksontwikkeling wordt (1)

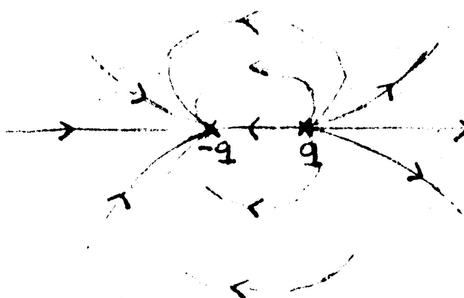
$$\vec{E}_p = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left\{1+2\cdot\frac{d}{2r}-1+2\cdot\frac{d}{2r}\right\}\vec{e}_x \qquad \text{etc.}$$

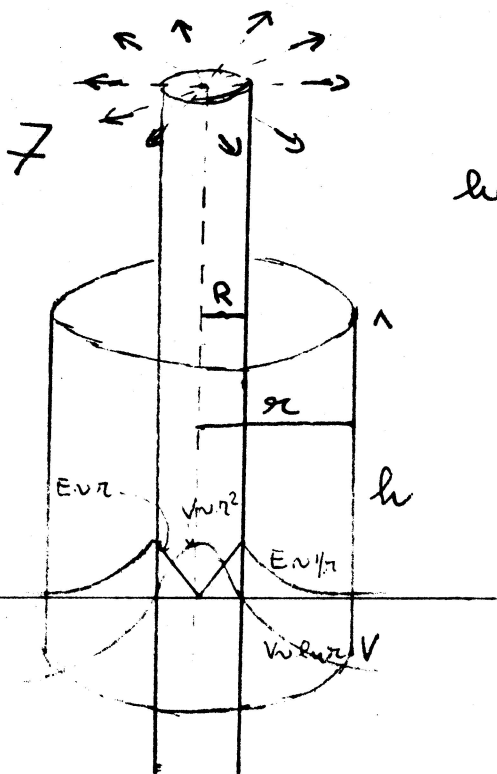
2) $$\vec{E}_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{-q}{r^2+\frac{1}{4}d^2}\cdot\cos\varphi\cdot\vec{e}_x + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2+\frac{1}{4}d^2}\cdot -\cos\varphi\cdot\vec{e}_x$$

$$= \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{\frac{1}{2}d}{(r^2+\frac{1}{4}d^2)^{3/2}}+\frac{\frac{1}{2}d}{(r^2+\frac{1}{4}d^2)^{3/2}}\right\}\vec{e}_x$$

voor $r \gg d$:

$$= \frac{-q\vec{d}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$





De ladingsverdeling in deze homogeen geladen oneindige cylinder is spiegelsymmetrisch t.o.v. ieder vlak ⊥ de cylinderas en spiegelsymmetrisch t.o.v. ieder vlak door die as. Daarom liggen de veldlijnen in vlakken ⊥ de as, en staan in die vlakken ook ⊥ de as. (radiaal veld)

Denk om de geladen cylinder nog een cylindermantel met straal r en lengte h (Gauss opp.)

Volgens Gauss: $\oiint_O \vec{E} \cdot d\vec{O} = \frac{Q_{omvat}}{\varepsilon_0}$

$r \leq R$: $\vec{E}(r) \cdot 2\pi r h = \frac{\rho \cdot \pi r^2 h}{\varepsilon_0} \rightarrow \vec{E}(r) = \frac{r\rho}{2\varepsilon_0}\hat{r}$

$r \geq R$: $\vec{E}(r) \cdot 2\pi r h = \frac{\rho \cdot \pi R^2 h}{\varepsilon_0} \rightarrow \vec{E}(r) = \frac{R^2\rho}{2\varepsilon_0 r}\hat{r}$

$r \leq R$: $\operatorname{div}\vec{E}(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\operatorname{div} r\hat{r} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y\right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$r \geq R$: $\operatorname{div}\vec{E}(r) = \frac{R^2\rho}{2\varepsilon_0}\operatorname{div}\frac{\hat{r}}{r} = \frac{R^2\rho}{2\varepsilon_0}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2}\right) = 0$

$r \leq R$; $V(r) = \int_R^r \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r' dr' = \frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0}$ daar $V(R) = 0$

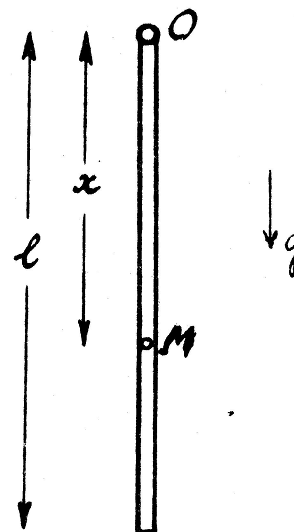
$r \geq R$: $V(r) = \int_R^r \frac{R^2\rho}{2\varepsilon_0}\frac{dr'}{r'} = -\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}\ln r$

TRANSITORIUM I
RIJKSUNIVERSITEIT
UTRECHT

TENTAMEN MECHANIKA VOOR EERSTEJAARS 72/73

19 januari 1973

1. Een lange, dunne, homogene lat met massa M en lengte l hangt aan een horizontale as door O (zie figuur) en oscilleert zonder wrijving, onder invloed van de zwaartekracht, als een fysische slinger in een verticaal vlak.



   a) Bereken het traagheidsmoment I_O van de lat om de as door O. $\frac{1}{3}Ml^2$

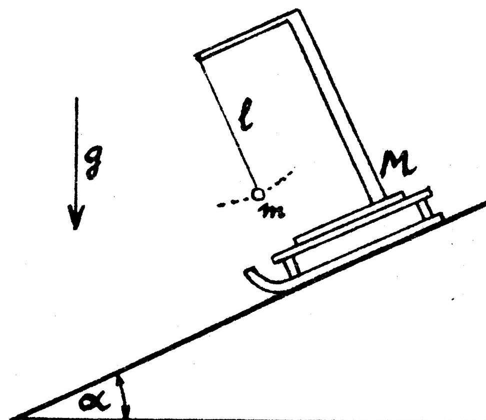
   b) Bereken de periode T_O van deze slinger voor kleine uitwijkingen. $2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}}$

   c) Een puntmassa M (met een evengrote massa als de lat) wordt op een afstand x van het ophangpunt O aan de lat bevestigd. Druk de periode T van de slinger, bestaande uit lat en puntmassa uit in x. $2\pi\left(\frac{\frac{1}{3}l^2+x^2}{2g\left(\frac{1}{4}l+\frac{1}{2}x\right)}\right)^{\frac{1}{2}}$

   d) Voor welke waarde(n) van x is $\frac{T}{T_O} = 1$? 0 $\frac{2}{3}l$

   e) Geef een fysische interpretatie van het feit dat in het geval (de gevallen) sub d) de periode niet verandert door de aanwezigheid van de puntmassa.

2. Een slee glijdt zonder wrijving van een hellend vlak met hellingshoek α. Op de slee is een statief bevestigd waaraan een mathematische slinger hangt. De massa van deze slinger is m, de lengte l. De massa van slee en statief samen is M, de versnelling van de vrije val is g.



   a) Stel dat tijdens bovengenoemde beweging de massa m t.o.v. de slee in rust verkeert, en niet slingert. De slinger hangt dan zoals in de figuur is getekend. Bewijs dat dit juist is.

   <u>Aanwijzing</u>: Teken in de figuur de echte krachten en de schijnkrachten die op de massa m werken in het systeem van de glijdende slee en geef hun grootte aan.

(vervolg z.o.z.)

b) Bereken de slingertijd (of de frekwentie) voor kleine uitwijkingen (klein t.o.v. l) van de slinger op de glijdende slee. $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$

c) Stel dat de wrijvingskoëfficiënt van slee en hellend vlak f zou zijn, bereken dan de hoek die de slinger, die in rust is en niet slingert t.o.v. de glijdende slee, maakt met de normaal op het hellend vlak.

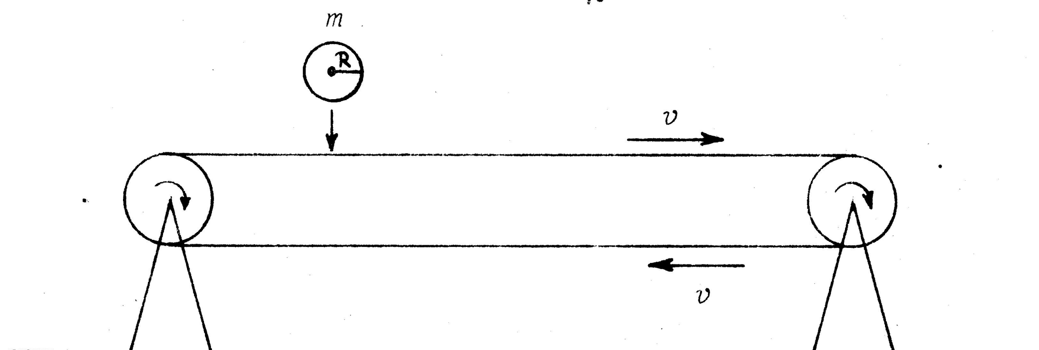
3. Een homogene massieve bol met massa m en straal R valt vertikaal op een transportband die met konstante snelheid v rondloopt in de zin zoals in de figuur is aangegeven. Vanaf het moment dat de bol in kontakt komt met de band treedt gedurende korte tijd Δt een wrijvingskracht F op, waardoor de bol door de band naar rechts wordt meegesleept en tevens in rotatie wordt gebracht. De bol beweegt daarna stationair en rolt op de band zonder te slippen. Voor een waarnemer die het bovenste deel van de band naar rechts ziet lopen met snelheid v is dan de translatiesnelheid van het zwaartepunt van de bol u en de hoeksnelheid van de bol ω.

a) Formuleer voor dit geval de slipvrije-rolvoorwaarde, d.w.z. druk u uit in v en ω. $u = v - \omega R$

b) Bereken de getalwaarde van $\frac{u}{v}$. $\frac{1}{2}$

c) Druk de totale kinetische energie van de bol in zijn stationaire bewegingstoestand uit in m en v. $\frac{7}{40} mv^2$

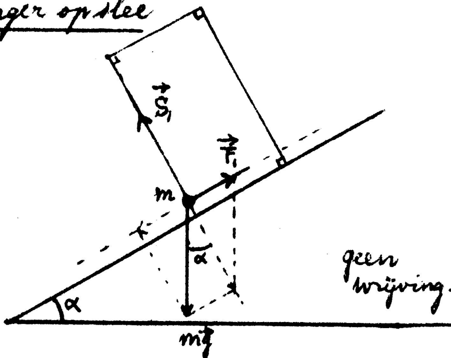
d) Bereken de arbeid door de band verricht vanaf het ogenblik waarop de bol kontakt maakt met de band totdat hij slipvrij over de band rolt.
Verklaar waarom deze arbeid niet gelijk is aan de in c) berekende kinetische energie van de bol. $\frac{\ell}{40} mv^2$

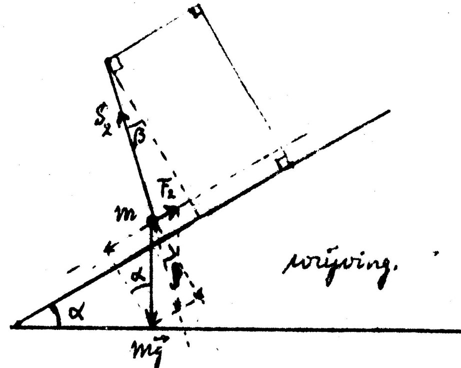


A1 Tentamen MECHANIKA 19/1/'73. Oplossing van de vraagstukken.

	Waardering*
1. Lat met extra puntmassa als fysische slinger	
a) $I_0 = \int_0^l \rho x^2 dx = \frac{1}{3}\rho l^3 = \frac{1}{3}Ml^2$ of met Steiner $I_0 = I_z + M(\frac{1}{2}l)^2 = \frac{1}{12}Ml^2 + \frac{1}{4}Ml^2 = \frac{1}{3}Ml^2$	1
b) $I_0\ddot{\theta} + Mgx\theta = 0$; $T = 2\pi\left(\frac{I_0}{Mgx}\right)^{1/2}$; $x = \frac{1}{2}l$ voor de lat alleen $I_0 = \frac{1}{3}Ml^2$; volgt $T_0 = 2\pi\left(\frac{2l}{3g}\right)^{1/2}$	2
c) $I = \frac{1}{3}Ml^2 + Mx^2$; $T = 2\pi\left\{\frac{\frac{1}{3}Ml^2 + Mx^2}{(\frac{1}{2}Ml + Mx)g}\right\}^{1/2} = 2\pi\left\{\frac{\frac{1}{3}l^2 + x^2}{(\frac{1}{2}l + x)g}\right\}^{1/2}$	3
d) $\frac{T}{T_0} = 1$ voor $\frac{\frac{1}{3}l^2 + x^2}{\frac{1}{2}l + x} = \frac{2l}{3g}$; volgt $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{2}{3}l$.	2
e) $x_1 = 0$ triviale oplossing; $x_2 = \frac{2}{3}l$: de equivalente slingerlengte: zie diktaat pag. 90.	1

2 Slinger op slee





a) glijden zonder wrijving. In het systeem van de glijdende slee ondervindt m tengevolge van de versnelling $g \sin\alpha$ een schijnkracht $\vec{F}_1$ zoals in de figuur is getekend. $|\vec{F}_1| = mg\sin\alpha$. Op m werken drie krachten t.w. $m\vec{g}$ (echt), $\vec{S}_1$ (echt) en $\vec{F}_1$ (schijn) onder invloed waarvan m in dit systeem in evenwicht verkeert. $m\vec{g} + \vec{F}_1 + \vec{S}_1 = 0$. $|\vec{S}_1| = mg\cos\alpha$; $\vec{S}_1 \perp \vec{F}_1$ dus de slinger hangt in evenwicht ⊥ het hellend vlak. — 4

b) voor een kleine uitwijking x is de terugdrijvende kracht $mg\cos\alpha \frac{x}{l}$, dus $\omega = \sqrt{\frac{g\cos\alpha}{l}}$. — 2

c). als de wrijvingscoëf. f is wordt de schijnkracht $|\vec{F}_2| = mg\sin\alpha - mgf\cos\alpha$. Uit de figuur is te zien dat $tg\,\beta = \frac{mg\sin\alpha - F_2}{mg\cos\alpha} = \frac{mgf\cos\alpha}{mg\cos\alpha} = f$. Krachtenevenwicht: $\vec{S}_2 + m\vec{g} + \vec{F}_2 = 0$. (Ten overvloede $|\vec{S}_2| = mg\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$). — 3

3 Bol op transportband.

a) Slipvrije-rolvoorwaarde: $u = v - \omega R$ (1) (u is snelheid band – omtreksnelheid ωR van de bol). — 2

b) impuls $F\Delta t = mu$ (2); impulsmoment $F\Delta t R = I\omega$ (3); $I = \frac{2}{5}mR^2$ (4); volgt uit (1)(2)(3)(4): $\frac{u}{v} = \frac{2}{7}$ — 3

c) $E_{k\,tr} + E_{k\,rot} = \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}m(\frac{2}{7}v)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mR^2(\frac{v}{R})^2 = \frac{1}{7}mv^2$. — 2

d) arbeid door de band verricht: $Fv\Delta t = \frac{p}{\Delta t}v\Delta t = pv = muv = \frac{2}{7}mv^2$. De helft van deze arbeid gaat "verloren" omdat met het in translatie brengen van de bol er slip optreedt tussen bol en band. Het in rotatie brengen van de bol geschiedt eveneens slippend en is dus ook een gedeeltelijk dissipatief proces. — 2

H.Nauta.

* De waardering per vraagstuk kan variëren van 1 t/m 10.